

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA**



TESIS

**INVERSIÓN CONJUNTA DE SÍSMICA DE REFRACCIÓN Y
SONDEOS ELÉCTRICOS VERTICALES UTILIZANDO
PROGRAMACIÓN EVOLUTIVA**

PRESENTA

ING. JORGE LUIS MERLO MEJÍA

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**

NOVIEMBRE, 2017

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA



TESIS

**INVERSIÓN CONJUNTA DE SÍSMICA DE REFRACCIÓN Y
SONDEOS ELÉCTRICOS VERTICALES UTILIZANDO
PROGRAMACIÓN EVOLUTIVA**

PRESENTA

ING. JORGE LUIS MERLO MEJÍA

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**

LINARES, NUEVO LEÓN, MÉXICO

NOVIEMBRE, 2017



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA



LA TESIS

**INVERSIÓN CONJUNTA DE SÍSMICA DE REFRACCIÓN Y
SONDEOS ELÉCTRICOS VERTICALES UTILIZANDO
PROGRAMACIÓN EVOLUTIVA**

QUE PRESENTA

ING. JORGE LUIS MERLO MEJÍA

**HA SIDO ACEPTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR
AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**

VO. BO. DEL DIRECTOR DE TESIS

DR. SÓSTENES MÉNDEZ DELGADO

LINARES, NUEVO LEÓN, MÉXICO

NOVIEMBRE, 2017



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA



LA TESIS

**INVERSIÓN CONJUNTA DE SÍSMICA DE REFRACCIÓN Y SONDEOS
ELÉCTRICOS VERTICALES UTILIZANDO PROGRAMACIÓN EVOLUTIVA**

QUE PRESENTA

ING. JORGE LUIS MERLO MEJÍA

**HA SIDO ACEPTADA COMO REQUISITO PARCIAL PARA OPTAR
AL GRADO DE MAESTRÍA EN CIENCIAS GEOLÓGICAS**

LA COMISIÓN DE REVISIÓN DE TESIS

DR. SÓSTENES MÉNDEZ DELGADO

Dr. Oscar Mario Romero de la Cruz

Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez

LINARES, NUEVO LEÓN, MÉXICO

NOVIEMBRE, 2017

Por este medio, declaro bajo protesta, haber realizado esta tesis de manera personal y haber utilizado únicamente los medios y procedimientos descritos en la misma.

Jorge Luis Merlo Mejía
Linares, Nuevo León, 2017

Dedicatoria

A mis padres por brindarme todo su amor, apoyo y motivación para salir adelante, soy consciente de todo el esfuerzo y sacrificio que han hecho por mí y espero retribuirles a lo largo de mi vida todos los buenos momentos que me han dado. Todos los éxitos que logre en esta vida es debido y dedicado a ustedes.

A mi hermanita Melissa por su confianza, paciencia y por siempre estar ahí para apoyarme.

Agradecimientos

Al Dr. Sóstenes Méndez Delgado por toda su confianza y apoyo como director de esta tesis así como la total disposición para transmitir sus conocimientos.

Al Dr. Óscar Mario Romero de la Cruz por la confianza depositada en este proyecto y por brindarme su amistad, consejos y apoyo de manera académica, personal y deportiva.

Al Dr. Francisco Javier Almaguer Martínez por sus consejos, paciencia y confianza transmitidos en todo momento.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, por su apoyo, al otorgarme la beca de manutención durante los estudios de maestría.

A la Facultad de Ciencias de la Tierra por tantas experiencias vividas y por haberme hecho crecer como persona en el ámbito académico y personal.

Al Lic. Roberto Soto Villalobos, el *Profe Soto*, por todas sus enseñanzas, disposición y paciencia a lo largo de estos años, pero sobre todo, por los tantos buenos consejos que me han guiado de manera correcta académica y personalmente. Toda mi admiración y respeto.

A mi generación de posgrado la “MGP”, Saimon, Christian, Chava, Xavi, Ana, Carlos, Jovany, Chucho, Meme, Myriam, Leny, Angelo y Don Raul por tantos buenos momentos y por enseñarme el significado de una amistad duradera.

A mis amigots de posgrado Saimon, Manuel, Darío, Freddy, Lalo, Moy, Adrián, Daniel y Sergio, por aguantarme y por haberme hecho pasar momentos muy agradables.

Al Ing. Sahid Ruiz por su amistad y por haber estado ahí para apoyarme siempre que lo necesitara.

Al M.C Gerardo Vargas por haberme apoyado académica y personalmente siempre que ha sido requerido.

Al Dr. Fernando Velasco Tapia por todas sus reflexiones de vida, consejos y regaños al estar pendiente de mi trabajo de tesis.

Al Dr. Carlos Aguilar Madera por haberme brindado su apoyo en posgrado.

Índice general

Índice general	I
Índice de figuras	III
Índice de tablas	VI
Resumen	VIII
Abstract	IX
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Hipótesis	3
1.3. Objetivos	3
1.3.1. Objetivos Generales	3
1.3.2. Objetivos Particulares	3
1.4. Metodología	4
2. Optimización Global en Inversión Geofísica	5
2.1. Introducción	5
2.2. Métodos de inversión basados en modelos	6
2.3. Optimización Global	8
2.3.1. Programación Evolutiva	9
2.4. Programación Evolutiva aplicada a Estimación de Parámetros	14
2.4.1. Anomalía gravimétrica de una esfera	14
2.4.2. Resultados del modelo de esfera	16
2.5. Resumen	16

3. Inversión de Sísmica y Resistividad mediante PE	18
3.1. Introducción	18
3.2. Sísmica de Refracción	19
3.2.1. Modelado directo de Sísmica de Refracción utilizando Programación Evolutiva	19
3.2.2. Optimización de la ecuación de tiempos de arribo mediante Programación Evolutiva	22
3.2.3. Modelado inverso de Sísmica de Refracción utilizando Programación Evolutiva	33
3.3. Sondeo Eléctrico Vertical (SEV)	36
3.3.1. Modelado Directo de SEV	36
3.3.2. Modelado Inverso de SEV utilizando Programación Evolutiva	40
3.4. Inversión Conjunta	41
3.4.1. Esquema de Inversión Conjunta mediante PE	42
3.5. Resumen	44
4. Análisis y Resultados	45
4.1. Introducción	45
4.2. Inversión de Datos	46
4.2.1. Inversión de datos para modelos de 3 capas y un semiespacio	52
4.2.2. Inversión de datos para modelos de 4 capas	58
4.2.3. Inversión de datos para un modelo complejo	62
4.3. Análisis	65
4.4. Resumen	65
5. Conclusiones y Recomendaciones	66
5.1. Conclusiones	66
5.2. Recomendaciones	67
Bibliografía	68

Índice de figuras

2.1. Diagrama de flujo de Programación Evolutiva	10
2.2. Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 15 generaciones en la maximización de la función presentada en la Ecuación 2.9. Los valores mostrados en cada gráfica corresponden al seguimiento de un individuo elegido al azar, representado por ●.	11
2.3. Función Egg-Holder, con una gran cantidad de máximos y mínimos locales. .	12
2.4. Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 54 generaciones, el resultado de la estimación de parámetros se presenta en (d) donde se puede apreciar la convergencia de todos los individuos a una misma respuesta. . . .	13
2.5. Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 100 generaciones, el resultado de la estimación de parámetros se presenta en (d) donde se puede apreciar la convergencia de todos los individuos a una misma respuesta. . . .	17
3.1. Esquema representativo de la trayectoria de un rayo refractado en un medio de tres capas simbolizando los parámetros utilizados en la Ecuación 3.8 (Modificado de Marroquín Navarro (2012)).	20
3.2. Población inicial del trazado de rayos para sísmica de refracción. Aplicado al modelo descrito en la Tabla 3.1	25
3.3. Trazado de rayos en la generación 20. Se puede apreciar la tendencia a seguir para cada trayectoria Fuente-Geófono en las siguientes generaciones.	25
3.4. Trazado de rayos en la generación 50. Se presenta la convergencia de cada individuo en base al tiempo mínimo para cada trayectoria Fuente-Geófono. .	26

3.5. Trazado de rayos en la generación 100, todos los individuos han llegado a una misma solución al encontrar la trayectoria con el tiempo mínimo para cada distancia Fuente-Geófono.	26
3.6. Trazado de rayos que viajan a través del estrato inferior del Modelo 2 a partir de las coordenadas obtenidas por el algoritmo de PE	29
3.7. Tiempos de arribo graficados a partir del Modelo 2.	29
3.8. Trazado de rayos que viajan a través de todos los estratos presentes en el Modelo 3.	30
3.9. Tiempos de arribo graficados a partir del Modelo 3 (Figura 3.8).	31
3.10. Trazado de rayos sísmicos que viajan a través de todos los estratos del Modelo 4.	32
3.11. Tiempos de arribo calculados para el Modelo 4.	33
3.12. Representación de un individuo o rayo sísmico mutado que viaja a través de un modelo de velocidades.	35
3.13. Curva de resistividad aparente para distintos modelos estratificados del subsuelo. Se pueden apreciar algunas de las nomenclaturas utilizadas para la interpretación, en caso de abordar a mayor detalle este tema se recomienda consultar Telford <i>et al.</i> (1990) o Kearey <i>et al.</i> (2013)	39
4.1. Parámetros del Modelo 1, de 2 capas con resistividades y velocidades en orden ascendente.	46
4.2. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 1, la población inicial explora todo el espacio de soluciones.	47
4.3. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 20, se puede apreciar la tendencia a seguir en las siguientes generaciones.	48
4.4. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 50.	49
4.5. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 150.	50

4.6. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 300, a partir de la generación 150 se puede apreciar una estabilidad en el valor rms. Todos los individuos han llegado a una misma solución.	51
4.7. Parámetros del Modelo 2, de tres capas con velocidades y resistividades en orden ascendente.	52
4.8. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 2.	53
4.9. Parámetros del Modelo 3, de tres capas con velocidades ascendentes y una capa resistiva en medio de dos conductivas.	54
4.10. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 3.	55
4.11. Parámetros del Modelo 4, de tres capas con velocidades ascendentes y una capa conductiva en medio de dos resistivas.	56
4.12. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 4.	57
4.13. Parámetros del Modelo 5, de 4 capas con velocidades y resistividades en orden ascendente.	58
4.14. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 5.	59
4.15. Parámetros del Modelo 6, de 4 capas con velocidades ascendentes y alternación en resistividades.	60
4.16. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 6.	61
4.17. Parámetros del Modelo 7, que consiste de dos capas para sísmica y tres capas para resistividad.	62
4.18. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 7.	63
4.19. Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 7 contaminado con un 5 % de ruido gaussiano.	64

Índice de tablas

3.1. Parámetros utilizados para el Modelo 1.	24
3.2. Parámetros utilizados para el Modelo 2.	27
3.3. Tiempos de arribo calculados para el Modelo 2 mediante el algoritmo de PE y comparados con los obtenidos de Burger (1992) . Se puede apreciar como la onda refractada a partir del geófono 30 llega a ser más rápida que la onda directa.	28
3.4. Parámetros utilizados para el Modelo 3.	30
3.5. Parámetros utilizados para el Modelo 4.	32
3.6. Coeficientes del filtro digital “corto” de Ghosh para un arreglo Schlumberger.	37
3.7. Coeficientes del filtro Guptasarma de 11 puntos.	38
4.1. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 1, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	46
4.2. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 2, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	52
4.3. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 3, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	54
4.4. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 4, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	56

4.5. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 5, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	58
4.6. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 6, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	60
4.7. Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 7, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).	62

Resumen

La complejidad del problema inverso en geofísica ha llevado a soluciones no analíticas por lo que se han explorado distintas técnicas alternativas en la búsqueda de una solución óptima, dentro de las que se pueden mencionar las técnicas metaheurísticas, ya que conociendo el espacio de soluciones, el problema inverso puede ser planteado como un problema de optimización en el que nuestra búsqueda (dadas ciertas restricciones) se puede reducir a encontrar de manera aleatoria un óptimo que proporcione una solución al problema. Los métodos geofísicos analizados en el presente trabajo son sísmica de refracción y sondeo eléctrico vertical, que se aplican generalmente a la delimitación de estructuras cerca de la superficie. La aplicación del sondeo eléctrico vertical es apropiada cuando las unidades geológicas se presentan de manera superficial y con una gran extensión lateral en la litología, aunque su desempeño se limita al afrontar el problema de equivalencia. La sísmica de refracción también tiene sus limitaciones, como la incapacidad de detectar estratos delgados y sus respectivas profundidades y velocidades. Las limitaciones de cada técnica pueden reducirse en gran medida adoptando un esquema de inversión conjunta. Diferentes cantidades físicas pueden integrarse en una inversión conjunta si los datos medidos están influenciados por un subconjunto de parámetros comunes. Para los datos de sísmica de refracción y sondeos eléctricos verticales que representan respuestas físicamente diferentes, el espesor de capa puede funcionar como parámetro en común para ambos. El objetivo principal del presente trabajo es introducir un algoritmo capaz de resolver la inversión conjunta de ambos métodos utilizando Programación Evolutiva, una variante de los métodos de Monte Carlo inspirada en la evolución de las especies y la selección natural. Se realizaron varias pruebas teniendo como resultado una estimación de parámetros bastante aproximada a los propuestos en el modelado directo, se probó que la técnica es capaz de ser utilizada en datos sintéticos contaminados con ruido, validando su efectividad para poder trabajar con datos reales.

Abstract

The complexity of the inverse problem in geophysics has led to non-analytical solutions. Therefore, alternative techniques have been explored in the search for an optimal solution, within which metaheuristic techniques can be mentioned, since knowing the solutions space, the inverse problem can be posed as an optimization problem in which our search (given certain constraints) can be reduced to randomly find an optimum that provides a solution to the problem. The methods analyzed in the present work are refraction seismic and vertical electrical sounding, which are generally applied for the delimitation of structures near the surface. The application of the vertical electrical sounding is appropriate when the geological units are presented superficially and with a great lateral extension in the lithology, although their performance is limited when facing the problem of equivalence. Seismic refraction also has its limitations, such as inability to detect thin strata and their respective depths and velocities. The individual constraints of each technique can be greatly reduced by adopting a joint inversion scheme. Different physical quantities can be integrated into a joint inversion if the measured data is influenced by a subset of common parameters. For refractive seismic and vertical electrical sounding data representing physically different responses, the layer thickness can function as the common parameter for both. The main objective of the present work is to introduce an algorithm capable of solving the joint inversion of both methods using the Evolutionary Programming technique, a variant of Monte Carlo methods inspired by the evolution of the species and the natural selection from which it was obtained an estimation of parameters quite close to those proposed in direct modeling, it was proved that it is capable of being used in synthetic data contaminated with noise, validating its effectiveness in order to be able to work with real data.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El determinar la estructura del subsuelo y sus propiedades físicas a partir de los datos geofísicos observados consiste en resolver el *problema inverso*. Es por esta razón que la teoría del problema inverso en su sentido más amplio ha sido desarrollada por investigadores que han propuesto distintas técnicas para la inversión de datos en geofísica ([Menke, 1984](#); [Meju, 1994](#); [Parker, 1994](#); [Sen y Stoffa, 1995](#); [Tarantola, 2005](#)) ya que se trata de entender el interior de la Tierra sólo a partir de datos obtenidos desde la superficie. Para comprender como los datos son afectados por el modelo se procede a resolver el *problema directo*, que consiste en calcular la respuesta para un modelo del subsuelo propuesto. Las limitaciones individuales de cada método geofísico pueden reducirse en gran medida adoptando un esquema de inversión conjunta en el que diferentes cantidades físicas pueden integrarse si los datos medidos están influenciados por un subconjunto de parámetros comunes. [Vozoff y Jupp \(1974\)](#) introdujeron esta técnica mediante la combinación de datos de resistividad y magnetotelúricos observando una mejor resolución en los parámetros del modelo estimado. A partir de ese año diversos autores han estudiado la combinación de diferentes métodos geofísicos con la finalidad de obtener una mejor estimación de parámetros, entre los más comunes se pueden mencionar los métodos sísmicos-geoléticos ([Kumar *et al.*, 1999](#); [Gallardo y Meju, 2003](#); [de Nardis *et al.*, 2005](#); [Juhojuntti y Kamm, 2015](#)), de resistividad, conductividad y medición magnética de resistividad (MMR) ([Méndez Delgado, 1997](#); [Pérez Flores *et al.*, 2001](#)) para delimitar estructuras superficiales y los métodos magnéticos-gravimétricos para obtener una mejor

resolución a más profundidad ([Fedi y Rapolla, 1999](#); [Gallardo Delgado *et al.*, 2003](#); [Pilkington, 2006](#)).

La complejidad del problema inverso en geofísica ha llevado a soluciones no analíticas por lo que se han explorado distintas técnicas alternativas en la búsqueda de una solución óptima, dentro de estas técnicas se pueden mencionar los Algoritmos Evolutivos (AEs), técnicas fundamentadas en los principios evolutivos de la naturaleza e introducidos durante los años 60 y 70 mediante tres interpretaciones distintas de esta idea. Así es como la Programación Evolutiva (PE) ([Fogel *et al.*, 1966](#)), las Estrategias Evolutivas (EE) ([Rechenberg, 1973](#)) y los Algoritmos Genéticos (AGs) ([Holland, 1975](#)) sentaron las bases de lo que es hoy en día la Computación Evolutiva (CE), es a partir de estos años que los AEs se han diversificado en el campo de la optimización por distintas ramas de la ciencia.

De acuerdo a [Deb \(2001\)](#), aunque existen diferentes AEs, todos comparten un conjunto de propiedades en común que las diferencian de los métodos clásicos de optimización: trabajan con una población de soluciones en un determinado espacio de búsqueda lo que elimina la dependencia de asumir una solución inicial así como reducir la tendencia a quedar atrapado en un mínimo local. Al iniciar con un conjunto aleatorio de soluciones, un AE modifica la población actual a una población diferente en cada iteración. El trabajar con un número de soluciones proporciona al AE la capacidad para detectar múltiples soluciones óptimas en cada simulación. Ya que no se requiere linealizar el problema directo o calcular derivadas parciales el AE no asume una estructura particular del problema a resolver, esto debido a que sus operadores utilizan procesos estocásticos y no determinísticos.

Una vez hecho el análisis anterior y conociendo el espacio de soluciones, el problema inverso puede ser planteado como un problema de optimización en el que nuestra búsqueda (dadas ciertas restricciones) se puede reducir a encontrar, de manera aleatoria, un óptimo que proporcione una solución al problema.

Los dos métodos geofísicos analizados en este trabajo son Sondeos Eléctricos Verticales (SEVs) y Sísmica de Refracción que se aplican generalmente para la delimitación de estructuras cerca de la superficie. Se utiliza el lenguaje de programación R, uno de

los lenguajes más utilizados en investigación por la comunidad estadística y que será implementado en el área de la optimización al diseñar un algoritmo de PE para aplicarlo a la inversión conjunta de los métodos antes mencionados.

1.2. Hipótesis

Aplicar un algoritmo de PE en la inversión conjunta de sísmica de refracción y sondeos eléctricos verticales producirá buenos resultados para diversas pruebas de inversión de datos sintéticos en modelos 1-D, validando su aplicación a datos reales.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivos Generales

- Diseño de un algoritmo de PE de fácil implementación para poder aplicarlo a distintos problemas de inversión en geofísica y de optimización en general.
- Inversión conjunta de datos de resistividad aparente en SEVs y de tiempos de arribo en Sísmica de Refracción, utilizando un algoritmo de PE con el cual se puedan obtener modelos 1-D del subsuelo y cuyos datos calculados se ajusten de manera adecuada a la respuesta sísmica y resistiva observada.

1.3.2. Objetivos Particulares

- Programar un algoritmo de PE en el lenguaje de programación R.
- Validar el funcionamiento de PE mediante la optimización de distintas funciones que presenten una gran cantidad de máximos y mínimos locales.
- Programar el Trazado de Rayos de Sísmica de Refracción mediante la optimización de la ecuación de tiempo de arribo para resolver el problema directo. Esto permitirá, por un lado, obtener datos sintéticos para hacer pruebas y validar el algoritmo de inversión de sísmica de refracción; por otro lado, generar datos “reales” al contaminarlos con ruido.

- Resolver el problema directo de resistividad aparente para distintos modelos 1-D mediante filtros lineales de Guptasarma. Esto, al igual que en el punto anterior, permitirá obtener datos sintéticos para hacer pruebas y validar el algoritmo de inversión para sondeos eléctricos verticales; por otro lado, generar datos “reales” al contaminarlos con ruido.
- Validar la autenticidad de los programas generados para resolver el problema directo en ambos métodos.
- Generar datos sintéticos de resistividad aparente y tiempos de arribo para distintos modelos 1-D del subsuelo, así como agregarle un cierto porcentaje de ruido gaussiano para simular las condiciones de datos reales.
- Adaptar el algoritmo de PE para aplicarlo a la inversión conjunta de SEVs y Sísmica de Refracción considerando el parámetro en común entre ambos métodos.
- Someter el algoritmo de PE a distintas pruebas de inversión de datos sintéticos de resistividad aparente y tiempos de arribo.

1.4. Metodología

Se realizó una recopilación bibliográfica sobre los temas a abordar, fueron consultados varios artículos, libros y trabajos de grado que tratan los principios de los métodos geofísicos analizados en el presente trabajo, así como de las distintas técnicas de inversión, haciendo énfasis en la Programación Evolutiva, una variante de los algoritmos evolutivos adaptado para el problema en cuestión y programado en R Studio.

En el Capítulo 2 se presenta un bosquejo de las distintas técnicas de inversión así como un análisis más detallado de la Programación Evolutiva y su aplicación en geofísica. En el Capítulo 3 se presenta la metodología a seguir en la inversión de datos mediante PE aplicada a los métodos geofísicos de sísmica y resistividad, de manera individual y conjunta. Posteriormente se muestran en el Capítulo 4 los resultados de la inversión aplicada a distintos modelos estratificados del subsuelo validando el funcionamiento del algoritmo.

Capítulo 2

Optimización Global en Inversión Geofísica

2.1. Introducción

La complejidad del problema inverso se debe principalmente a tres aspectos a considerar, el primero de ellos es la **existencia de la solución** ya que puede no existir un modelo que ajuste exactamente a los datos por lo que la respuesta obtenida es una aproximación de la solución real, el siguiente aspecto es la **unicidad de la solución**, un solo problema puede tener múltiples soluciones, caso que se presenta cuando modelos totalmente distintos producen un buen ajuste de datos, y por último, la extrema **inestabilidad** durante el cálculo de la solución, por lo que un pequeño cambio en los valores durante el proceso puede modificar completamente el modelo final ([Aster *et al.*, 2013](#)). Según [Tarantola \(2005\)](#), el procedimiento científico para el estudio de un sistema físico puede ser dividido en los tres siguientes pasos.

- i *Parametrización del sistema*: reconocimiento de los *parámetros mínimos del modelo* cuyos valores caracterizan completamente el sistema.
- ii *Modelado Directo*: comprender las leyes físicas que permitan, para valores dados de parámetros del modelo, realizar predicciones en los resultados de las mediciones de algunos *parámetros observados*.
- iii *Modelado Inverso*: uso de los resultados reales de algunas mediciones de los parámetros observables para inferir los valores reales de los parámetros del modelo.

2.2. Métodos de inversión basados en modelos

Se generan datos sintéticos para un modelo propuesto y se comparan con los datos observados. Si la coincidencia entre datos observados y sintéticos es aceptable, el modelo se acepta como la solución óptima. De lo contrario, se cambia el modelo, se vuelven a calcular los datos sintéticos y se comparan de nuevo con las observaciones. Este procedimiento se repite de manera iterativa hasta que se obtiene una coincidencia aceptable entre datos observados y sintéticos. De esta manera, la inversión puede ser vista como un *problema de optimización* ya que se busca un modelo el cual minimize las diferencias entre entre datos observados y sintéticos. Los métodos de optimización varían según su método de búsqueda al modelo óptimo. El más simple de los métodos de optimización es aquel que asume una relación lineal entre los datos y el modelo, en cuyo caso se puede obtener una respuesta a la primera iteración.

En geofísica, siempre se trabaja con datos discretos y por lo tanto, es conveniente representar los datos como un vector columna de tipo

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1, & d_2, & d_3, & \dots, & d_{ND} \end{bmatrix}^T \quad (2.1)$$

donde ND es el número de datos y T significa traspuesta. Por ejemplo, en sismica de refracción cada valor d_i corresponde a un tiempo de arribo para cada distancia fuente-geófono donde ND es el número de geófonos. En sondeos eléctricos verticales, cada d_i es un valor de resistividad aparente medido a una separación de electrodos.

Similarmente, un modelo del subsuelo puede también ser representado por un vector columna

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1, & m_2, & m_3, & \dots, & m_{NP} \end{bmatrix}^T \quad (2.2)$$

donde NP es el número total de parámetros del modelo. Por ejemplo para un modelado 1-D en SEV's los parámetros del modelo son los espesores (h_i) y resistividades (ρ_i) de las capas del subsuelo. Los datos sintéticos son generados por el modelado directo usando un vector de parámetros \mathbf{m} . Por lo tanto, el vector de datos sintéticos d_{cal} puede ser calculado mediante la aplicación de un *operador de modelado directo*, G , para el vector de parámetros \mathbf{m} ,

$$\mathbf{d}_{cal} = G(\mathbf{m}) \quad (2.3)$$

El problema inverso ahora se reduce a determinar un modelo que minimice las diferencias entre los datos observados y sintéticos. Si el vector de error \mathbf{e} es dado por

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{d}_{obs} - \mathbf{d}_{cal} \quad (2.4)$$

una manera general de representarlo para llegar a una convergencia es definirla como una función *rms* entre los datos observados y calculados

$$rms = \frac{(\sum_{i=1}^N (d_{obs}^i - d_{cal}^i)^2)^{1/2}}{N^{1/2}} \quad (2.5)$$

donde, d_{obs}^i son los datos observados, d_{cal}^i los datos calculados y N es el número de datos.

De acuerdo a [Sen y Stoffa \(1995\)](#), dependiendo del método de búsqueda aplicado para encontrar soluciones óptimas, los métodos de inversión basados en modelos pueden ser clasificados en las siguientes categorías:

Métodos lineales/linealizados

Estos métodos asumen que los datos están en función de los parámetros del modelo, por lo tanto es posible reemplazar el operador de modelado directo g en con un operador lineal, una matriz \mathbf{G} para obtener

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m} \quad (2.6)$$

este problema inverso ahora puede ser resuelto con métodos de álgebra lineal conocidos.

Métodos iterativos lineales

Estos métodos también pueden ser llamados métodos basados en gradientes, ya que usan la derivada de la información para calcular el modelo a evaluar, como una forma de linealizar el problema. Algunos de los métodos de inversión que pertenecen a esta categoría son: Mínimos Cuadrados, Descomposición de Valores Singulares, Mínimos Cuadrados Ponderados, Newton, etc. Cabe señalar que estos son considerados los *métodos clásicos* para resolver el problema inverso en geofísica. Los datos observados y calculados para el modelo son evaluados iterativamente hasta obtener una diferencia mínima en el error a partir de un conjunto inicial de valores de los parámetros del modelo, denominado *solución inicial*. Ya que una solución en cada iteración es modificada en una solución diferente (que se espera sea mejor), el resultado es una sola solución óptima. Estos métodos convergen en el mínimo local más cercano a la solución inicial debido a que no exploran todo el espacio de búsqueda.

Métodos de Monte-Carlo

Este método involucra un muestreo aleatorio en un espacio de búsqueda. Se espera que en un número reducido de intentos, pueda ser capaz de obtener buenos resultados. Es una búsqueda completamente aleatoria y puede ser costosa computacionalmente.

Métodos de Monte-Carlo direccionados

Son los denominados métodos de optimización global (los algoritmos evolutivos pertenecen a esta categoría). Estos métodos utilizan la aleatoriedad con un cierto grado de dirección para guiar su búsqueda.

2.3. Optimización Global

Los métodos de búsqueda u optimización global utilizan procesos aleatorios o estocásticos para generar modelos dentro del espacio de búsqueda completo. Estos modelos son evaluados por medio de una *función objetivo* para determinar su calidad como solución al problema. Uno de los principales objetivos al resolver el problema inverso en geofísica es obtener el mínimo de la función de error *rms* (función objetivo) la cual mide la discrepancia entre los datos observados y calculados para un modelo propuesto. Al tener la posibilidad de explorar cualquier punto del espacio de búsqueda, reducen la tendencia de converger a un mínimo local y aumentan la probabilidad de que la solución final corresponda a la solución global del problema; la cual se puede definir como el conjunto de valores de los parámetros del modelo dentro del espacio de búsqueda que proporcionen el valor mínimo de la función objetivo ([Sánchez Priego, 2012](#)). Como se ha mencionado anteriormente, el campo de la optimización ha cambiado a través de los años mediante la introducción de una serie de algoritmos no clásicos y estocásticos de optimización. Dentro de los métodos de optimización global se encuentran los *algoritmos evolutivos* (AE) que simulan los principios evolutivos de la naturaleza para guiar su búsqueda hasta la solución óptima, se suelen dividir en tres:

- Algoritmos Genéticos
- Programación Evolutiva
- Estrategias Evolutivas

Aunque existen una serie de diferentes algoritmos evolutivos, todos están motivados por los principios naturales evolutivos. Una de las diferencias más notables de los algoritmos clásicos de optimización aplicados en geofísica es que los AEs utilizan una población de soluciones en cada iteración, en vez de solo una solución. Ya que una población de soluciones es procesada en cada iteración, el resultado de un AE es también una población de soluciones. Si el problema de optimización tiene un solo óptimo, se espera una convergencia de todos los miembros de la población a una misma solución. Sin embargo, si un problema de optimización tiene múltiples soluciones, un AE puede ser utilizado para detectar múltiples soluciones óptimas en su población final.

2.3.1. Programación Evolutiva

Es muy difícil identificar si un AE es mejor que otro debido a que el rendimiento puede variar para cada problema de optimización. La técnica utilizada en el presente estudio para resolver el problema de optimización se llama Programación Evolutiva (PE). Debido a que este método no utiliza una operación de cruce, puede resultar en una población más diversa que una sola ejecución de Algoritmos Genéticos (AG); esto puede ser muy útil para la inversión de datos en geofísica. De acuerdo a la descripción presentada por [Bäck y Schwefel \(1993\)](#) la PE es implementada de la siguiente manera.

- 1) Generar la población inicial de n individuos, establecer $k = 1$, donde k representa el número de generación en el que se encuentra el algoritmo. Cada individuo es tomado como un par de vectores evaluados (\mathbf{x}_i, σ_i) , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, donde las \mathbf{x}_i 's son las variables a estimar y σ_i 's son las desviaciones estándar para las mutaciones Gaussianas.
- 2) Evaluar el puntaje de aptitud para cada individuo (\mathbf{x}_i, σ_i) , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, de la población basado en la función objetivo, $f(\mathbf{x}_i)$.
- 3) Cada padre (\mathbf{x}_i, σ_i) , $i = 1, \dots, n$, genera un solo descendiente $(\mathbf{x}'_i, \sigma'_i)$ para cada individuo mutado, representado por $j = 1, \dots, n$

$$\mathbf{x}'_j = \mathbf{x}_i(j) + \sigma_i N_j(0, 1) \quad (2.7)$$

$$\eta'_j = \sigma_i(j) \exp(\tau' N(0, 1) + \tau N_j(0, 1)) \quad (2.8)$$

donde $x_i(j)$, $x'_i(j)$, $\sigma_i(j)$ y $\sigma'_i(j)$ denotan la componente j de los vectores \mathbf{x}_i , \mathbf{x}'_i , σ_i y σ'_i respectivamente. $N(0, 1)$ denota un número aleatorio con distribución normal de media cero y desviación estándar uno. $N_j(0, 1)$ indica que el número aleatorio es generado de nuevo para cada valor de j . Los factores τ y τ' se establecen comunmente como $(\sqrt{2\sqrt{n}})^{-1}$ y $(\sqrt{2n})^{-1}$.

- 4) Calcular la aptitud de cada descendiente $(\mathbf{x}'_i, \sigma'_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- 5) Realizar una comparación de parejas para todo el conjunto de padres (\mathbf{x}_i, σ_i) y descendientes $(\mathbf{x}'_i, \sigma'_i)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Para cada individuo, el oponente q es seleccionado uniformemente de manera aleatoria de todos los padres y descendientes. Para cada comparación, si la aptitud del individuo es menor (o mayor en caso de maximizar) a la del oponente, el primero recibe una "victoria".
- 6) Seleccionar los n individuos de (\mathbf{x}_i, σ_i) y \mathbf{x}'_i, σ'_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, que tienen el mayor número de victorias para ser padres de la siguiente generación.
- 7) Terminar si el criterio de detención se cumple; de lo contrario, $k = k + 1$ e ir al Paso 3.

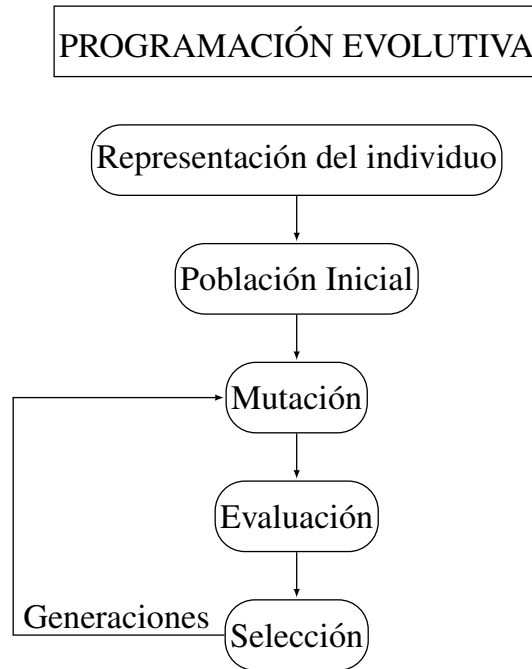


Figura 2.1: Diagrama de flujo de Programación Evolutiva

Función con una sola variable

Con el fin de analizar el desempeño de un algoritmo de PE, se procede a optimizar la siguiente función:

$$\left. \begin{aligned} \text{Maximizar } f(x) &= 2^{(2(x-0.1)/0.8)^2} \sin^6(5\pi x), \\ 0 \leq x &\leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

La Ecuación 2.9 (Deb, 2001) tiene un máximo de $f(x) = 1.0$ en $x = 0.1$, el problema radica en encontrar el máximo dentro del espacio de búsqueda $[0,1]$. Se utilizó una población de 100 individuos a lo largo de 15 generaciones, en la Figura 2.2 se puede apreciar la convergencia de todos los individuos hasta llegar al óptimo.

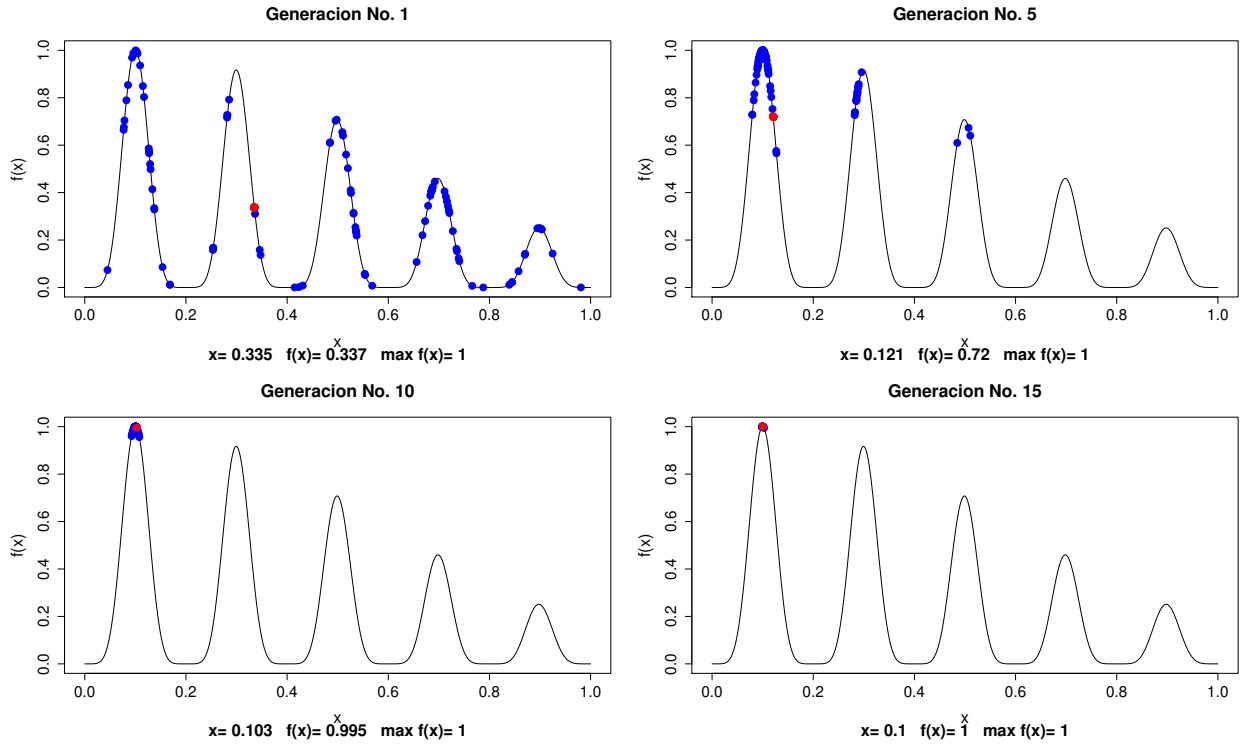


Figura 2.2: Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 15 generaciones en la maximización de la función presentada en la Ecuación 2.9. Los valores mostrados en cada gráfica corresponden al seguimiento de un individuo elegido al azar, representado por ●.

Función de dos variables

La función Egg-Holder (2.10) presenta una gran cantidad de máximos y mínimos locales como se muestra en la Figura 2.3; por lo tanto, es una buena prueba para validar el funcionamiento del algoritmo de PE. El problema consiste en encontrar dentro del rango $[-521, 521]$ los valores x_1 y x_2 tal que:

$$\left. \begin{aligned} \text{Minimizar } f(x_1, x_2) &= -(x_2 + 47) \sin \left(\sqrt{\left| x_2 + \frac{x_1}{2} + 47 \right|} \right) - x_1 \sin \left(\sqrt{|x_1 - (x_2 + 47)|} \right), \\ x_i &\in [-521, 521] \quad \text{para } i=1,2. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Tiene un mínimo de $f(x) = -959.6406$ en $(x_1, x_2) = (512, 404.2318)$. Se utilizó una población de 100 individuos hasta alcanzar el mínimo en la generación 54. En la Figura 2.4 se puede apreciar la convergencia de todos los individuos hasta llegar al óptimo.

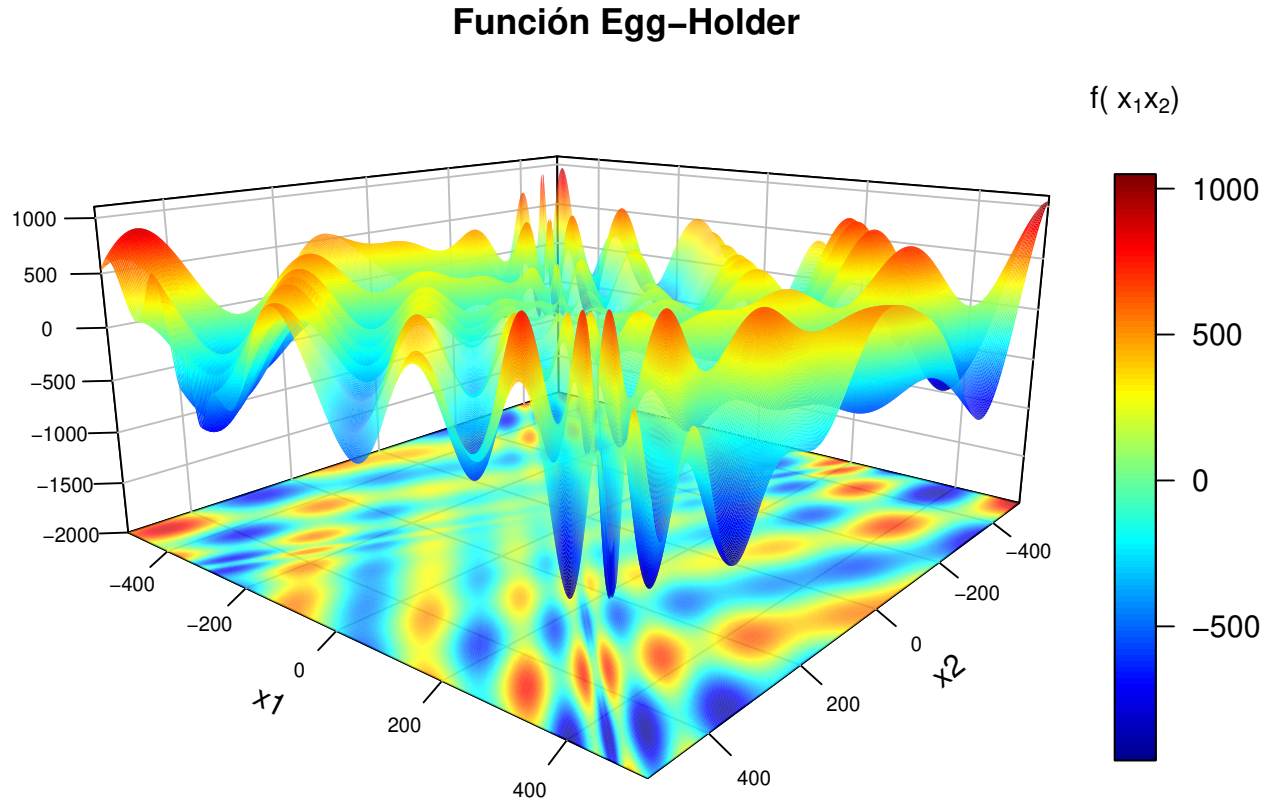


Figura 2.3: Función Egg-Holder, con una gran cantidad de máximos y mínimos locales.

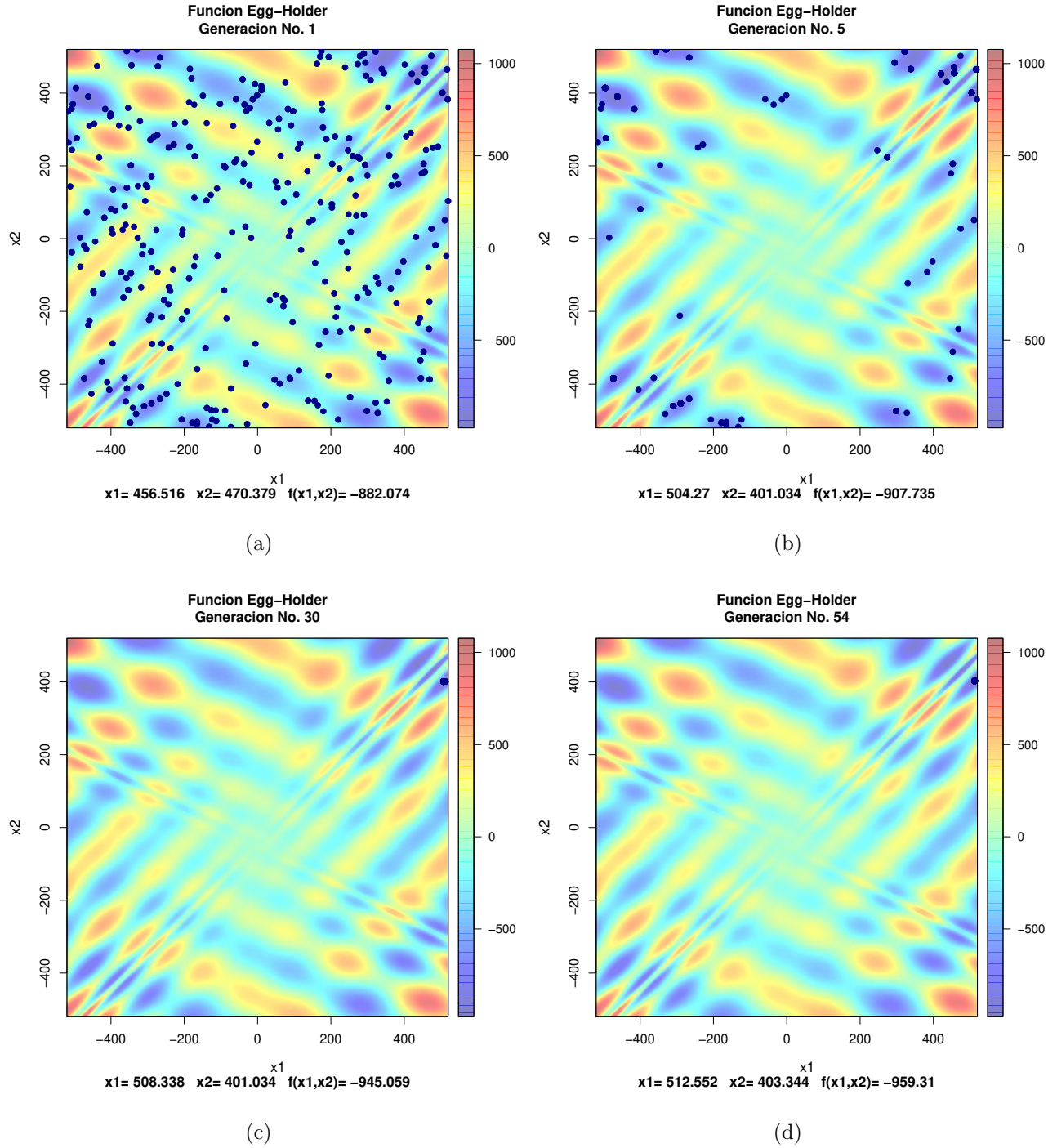


Figura 2.4: Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 54 generaciones, el resultado de la estimación de parámetros se presenta en (d) donde se puede apreciar la convergencia de todos los individuos a una misma respuesta.

2.4. Programación Evolutiva aplicada a Estimación de Parámetros

2.4.1. Anomalía gravimétrica de una esfera

A manera de introducción a la técnica utilizada en este trabajo se presenta la aplicación de Programación Evolutiva para realizar la estimación de parámetros de la anomalía gravimétrica generada por una esfera enterrada a cierta profundidad. La función que permite calcular la anomalía gravimétrica g es:

$$g = \frac{4G\Delta\rho\pi r^3 z}{3(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.11)$$

donde

x = distancia

z = profundidad del centro de la esfera

r = radio de la esfera

$\Delta\rho$ = contraste de densidades que se mantiene constante

G = constante gravitacional

los parámetros a estimar son z y r . Una vez definida la función a trabajar el siguiente paso es definir los operadores de Programación Evolutiva, que fueron implementados de la siguiente manera:

1. Representación del individuo

Individuo cuyo tamaño depende de la cantidad de parámetros a estimar

$$\left[r, \ z, \ sd, \ rms \right] \quad (2.12)$$

donde r y z son los parámetros a estimar, sd es la desviación estándar utilizada para la mutación Gaussiana y

$$rms = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (g - \hat{g})^2}{N}} \quad (2.13)$$

donde \hat{g} son los valores calculados y $N =$ número de datos, la Ecuación 2.13 es la función a minimizar ya que se busca una diferencia mínima entre los datos observados y calculados.

2. Población Inicial

Se generan aleatoriamente en un determinado espacio de búsqueda las desviaciones estándar sd y los parámetros del modelo a través de un conjunto de n individuos de la primera generación (Población Inicial), los cuales son evaluados en la Ecuación 2.13, arrojando un valor rms para cada uno de ellos. Es de esperar que en este caso el valor no sea óptimo, ya que el proceso es realizado completamente al azar.

$$\begin{bmatrix} r_1, & z_1, & sd_1, & rms_1 \\ r_2, & z_2, & sd_2, & rms_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_n, & z_n, & sd_n, & rms_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

3. Mutación

Todos los individuos de la población son sometidos a la mutación analizada en la Subsección 2.3.1, que modifica el valor de sus parámetros, por lo que se genera una nueva población de iguales dimensiones a la Población Inicial, que se denomina Población Mutada.

4. Evaluación

Los parámetros mutados son evaluados en (2.11) y posteriormente en (2.13) generando un nuevo valor rms para cada individuo. Los individuos con valores rms más bajos tendrán más probabilidad de pasar a la siguiente generación.

5. Selección

Se define un conjunto de individuos formado por la Población Inicial y la Población Mutada, los cuales son sometidos a un torneo que consiste en un formato de competencia todos contra todos, por lo que cada individuo compite con otro elegido al azar. Al individuo que resulte ganador, es decir, el que tenga el menor rms , recibe un valor de victoria tantas veces como sea ganador torneo tras torneo. Este valor nos permite conocer el resultado final de los enfrentamientos, solo el 50 % de los individuos del

conjunto de la población que hayan ganado el mayor número de veces formarán la nueva Población Inicial en la siguiente generación, el proceso se repite hasta que se tenga una convergencia en el algoritmo o se cumpla con algún criterio, ya sea de tiempo o al establecer un límite en el error.

2.4.2. Resultados del modelo de esfera

Fueron utilizados 100 individuos a lo largo de 100 generaciones en un rango de búsqueda lo suficientemente amplio para explorar un gran espacio de soluciones. En la Figura 2.5 se muestra gráficamente la convergencia de todos los individuos a la solución final, así como los valores de los parámetros estimados con el pasar de las generaciones.

2.5. Resumen

En este capítulo se presentaron las bases y fundamentos de la inversión de datos, así como las distintas técnicas que existen para dar una solución al problema, haciendo énfasis en los métodos de optimización global. Se realizó un análisis de la Programación Evolutiva haciendo una descripción detallada de cada uno de los operadores de este método (Representación del Individuo, Población Inicial, Mutación, Evaluación y Selección), para posteriormente poner a prueba su funcionamiento al optimizar distintas funciones. Por último, se presenta la aplicación de la Programación Evolutiva en geofísica para realizar la estimación de parámetros. El procedimiento a seguir muy similar en los métodos a considerar en esta investigación, aunque se presentan pequeñas variaciones en sus operadores, mismas que se analizarán en el Capítulo 3.

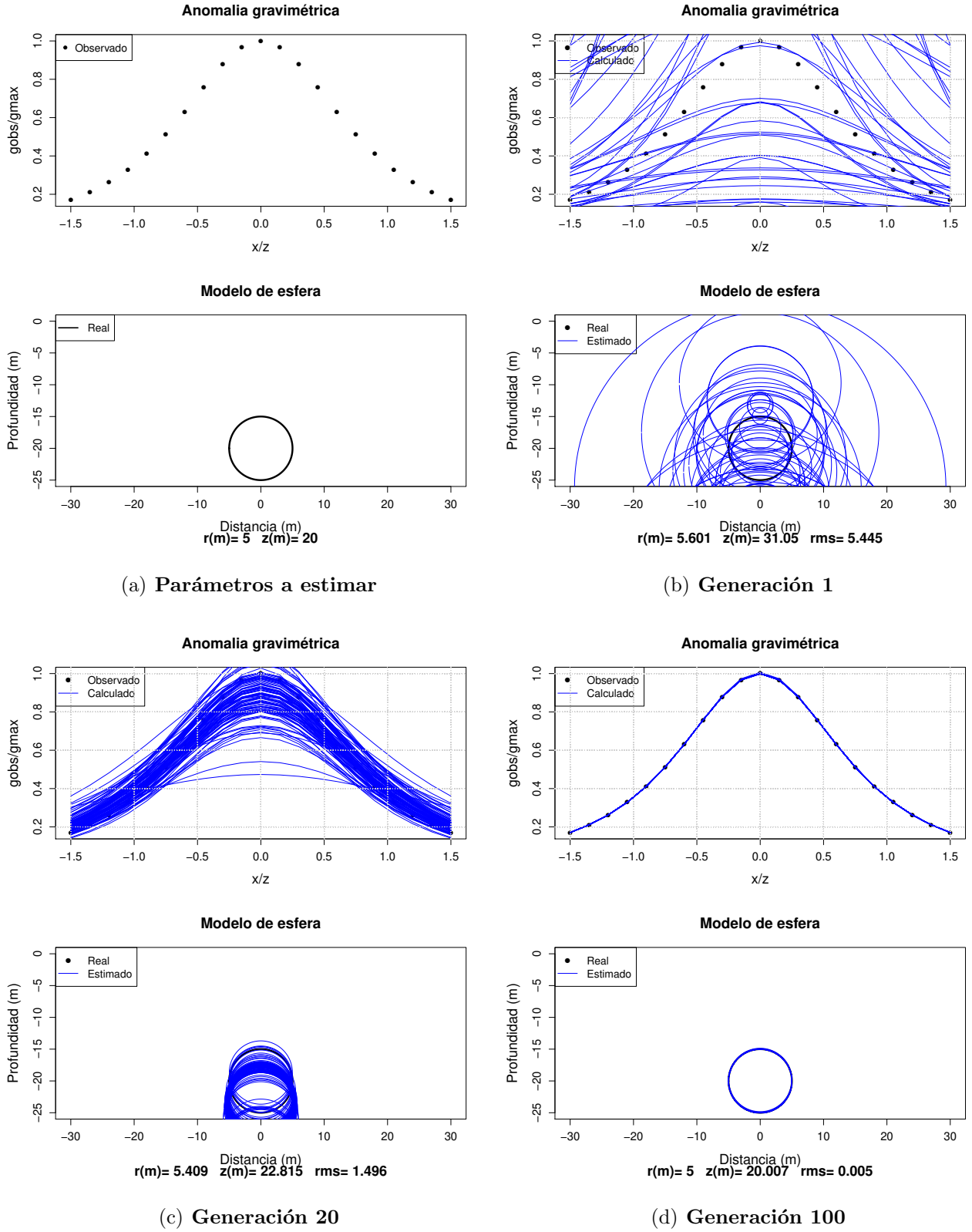


Figura 2.5: Evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 100 generaciones, el resultado de la estimación de parámetros se presenta en (d) donde se puede apreciar la convergencia de todos los individuos a una misma respuesta.

Capítulo 3

Inversión de Sísmica y Resistividad mediante PE

3.1. Introducción

Los métodos analizados en el presente trabajo son Sísmica de Refracción y Sondeo Eléctrico Vertical, que se aplican principalmente a aquellos problemas donde las discontinuidades o cambios de formación están próximos a la superficie. La Sísmica de Refracción determina las velocidades y profundidades de un medio estratificado, a partir del registro del tiempo de viaje de la onda refractada entre la fuente de energía y cada uno de los geófonos. El Sondeo Eléctrico Vertical (SEV) es una de las técnicas más utilizadas en geofísica para detectar y establecer los límites de capas horizontales del subsuelo estratificado, basándose en su contraste resistivo. Consiste en la inyección de corriente continua, en el área de estudio, mediante un par de electrodos y la determinación, mediante otro par de electrodos, de la diferencia de potencial.

En este capítulo se presenta la metodología a seguir para la aplicación de Programación Evolutiva en la inversión de datos. Cabe señalar que en el presente documento se asume que el lector comprende las bases teóricas de los métodos considerados en esta investigación, en caso de querer abordar a mayor detalle las leyes y fundamentos teóricos de sísmica y resistividad se recomienda consultar [Telford *et al.* \(1990\)](#), [Burger \(1992\)](#) o [Kearey *et al.* \(2013\)](#).

Se realiza un análisis detallado de las funciones utilizadas para resolver el modelado directo mediante el Trazado de Rayos para obtener los tiempos arribo en Sísmica de Refracción y el calculo de resistividad aparente en un SEV. Posteriormente se presenta un esquema para dar solución al problema inverso mediante PE de manera individual y conjunta.

3.2. Sísmica de Refracción

3.2.1. Modelado directo de Sísmica de Refracción utilizando Programación Evolutiva

Diseño del Modelo Geológico

Para simular el tiempo de arribo de la trayectoria del rayo que viaja desde la fuente a cada uno de los geófonos primeramente se procede a diseñar un modelo geológico de capas horizontales y velocidades definido por la pendiente m , profundidad de la interface h y velocidad V de cada uno de los estratos, modelados a partir de

$$y = mx + b \quad (3.1)$$

donde $b = h$ y $x =$ distancia fuente-geófono. Como se puede apreciar en la Figura 3.1 la profundidad h es a la base del estrato y está proyectada exactamente desde la fuente en superficie, en cuanto a la inclinación del estrato es necesario convertir el ángulo expresado en grados a radianes

$$m = \frac{\tan \alpha * \pi}{180} \quad (3.2)$$

al sustituir la Ecuación 3.2 y los valores x y b en la Ecuación 3.1 se puede obtener una expresión más generalizada (Ecuación 3.3 ([Marroquín Navarro, 2012](#))) y que es la utilizada para realizar el modelado geológico

$$y = \frac{\tan \alpha * \pi}{180} * (g_n - F) + h \quad (3.3)$$

Donde $g_n - F$ corresponde a la distancia fuente-geófono.

Deducción de la Ecuación de Tiempo de Arribo

Para el modelo estratificado de tres interfaces presentado en la Figura 3.1 la onda directa viaja de P_1 a P_6 , mientras que la onda refractada en $V_1 - V_2$ recorre la trayectoria $P_1P_2P_5P_6$ y la refractada en $V_2 - V_3$ viaja por $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$. A continuación, se presenta un análisis de la segunda trayectoria con el fin de deducir la ecuación de tiempos de arribo (Dávila Torres, 2012), por lo tanto el tiempo total del recorrido se puede calcular como:

$$tiempo = \frac{P_1P_2}{V_1} + \frac{P_2P_3}{V_2} + \frac{P_3P_4}{V_3} + \frac{P_4P_5}{V_2} + \frac{P_5P_6}{V_1} \quad (3.4)$$

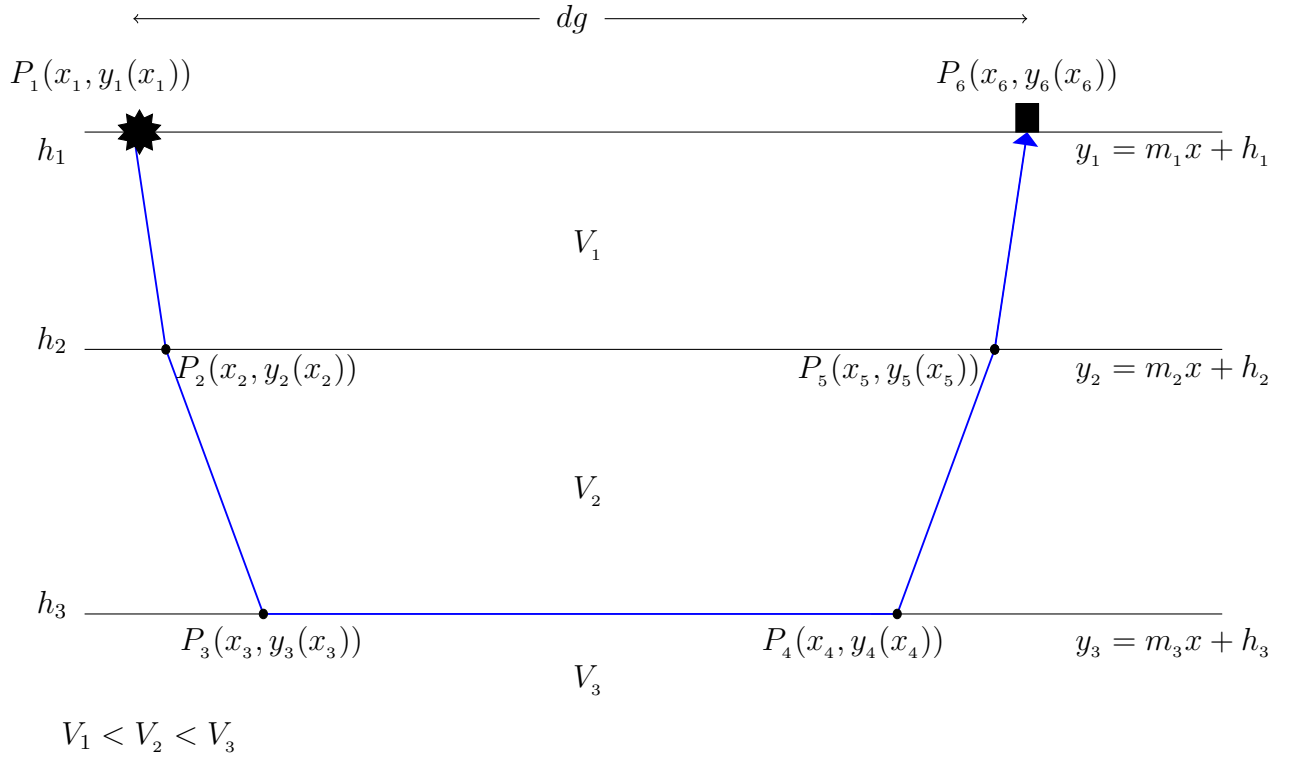


Figura 3.1: Esquema representativo de la trayectoria de un rayo refractado en un medio de tres capas simbolizando los parámetros utilizados en la Ecuación 3.8 (Modificado de Marroquín Navarro (2012)).

Basándose en la Figura 3.1 y utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos, la Ecuación 3.4 puede escribirse como:

$$\begin{aligned} tiempo = & \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{V_2} + \\ & \frac{\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}}{V_3} + \\ & \frac{\sqrt{(x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2}}{V_2} + \frac{\sqrt{(x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2}}{V_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

utilizando \sum la Ecuación 3.5 puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} tiempo = & \sum_{i=1}^2 \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{V_i} + \\ & \frac{\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}}{V_3} + \\ & \sum_{i=1}^2 \frac{\sqrt{(x_{i+4} - x_{i+3})^2 + (y_{i+4} - y_{i+3})^2}}{V_{3-i}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

La Ecuación 3.6 anterior puede ser generalizada para n capas,

$$\begin{aligned} tiempo = & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}{V_i} + \\ & \frac{\sqrt{(x_{n+2} - x_{n+1})^2 + (y_{n+2} - y_{n+1})^2}}{V_{n+1}} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{n+2+i} - x_{n+1+i})^2 + (y_{n+2+i} - y_{n+1+i})^2}}{V_{n+1-i}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sustituyendo en la Ecuación 3.7 las ecuaciones de la Figura 3.1 se obtiene

$$\begin{aligned} tiempo = & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + ((m_{i+1}x_{i+1} + h_{i+1}) - (m_i x_i + h_i))^2}}{V_i} + \\ & \frac{\sqrt{(x_{n+2} - x_{n+1})^2 + ((m_{n+1}x_{n+2} + h_{n+1}) - (m_{n+1}x_{n+1} + h_{n+1}))^2}}{V_{n+1}} + \\ & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{n+2+i} - x_{n+1+i})^2 + ((m_{n+1-i}x_{n+2+i} + h_{n+1-i}) - (m_{n+2-i}x_{n+1+i} + h_{n+2-i}))^2}}{V_{n+1-i}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

De esta forma la Ecuación 3.8 está en función de:

- V = Velocidad
- h = Profundidad
- m = Pendiente, con $m = \frac{\tan \alpha * \pi}{180}$ donde α es el ángulo de inclinación de las interfaces.
- x = Coordenadas (x, y) , los puntos por donde el rayo pasa de una interface a otra.

La Ecuación 3.8 se tomará como la función objetivo a minimizar mediante PE cuyos operadores y procedimiento para atacar este problema serán explicados en la siguiente subsección. Es importante señalar que para este trabajo $m = 0$ debido a que los modelos a analizar se presentan en capas horizontales.

3.2.2. Optimización de la ecuación de tiempos de arribo mediante Programación Evolutiva

Una vez determinado el modelo geológico (con m , h y V de cada estrato definido) y la función objetivo, el siguiente paso es definir los operadores de PE (Figura 2.1) para el modelado directo de sísmica de refracción; todo esto con la finalidad de calcular los tiempos de arribo y trayectorias de cada rayo que viaja desde la fuente al geófono correspondiente.

1. Representación del individuo

Como primer paso se representa el individuo de la siguiente manera

$$\left[(x_1 \quad \cdots \quad x_p) \quad sd \quad ta \right] \quad (3.9)$$

donde x_p son todas las posiciones del rayo cuando pasa de una interface a otra, sd es la desviación estándar utilizada para la mutación gaussiana y ta son los tiempos de arribo calculados para cada individuo.

2. Población Inicial

Basándose en la Figura 3.1, las posiciones x_1 (fuente) y $x_p = dg$ (geófono) de cada individuo n se conocen, por lo que se establece un espacio de búsqueda restringido entre estos límites, el cual será utilizado para generar aleatoriamente el conjunto de

individuos dentro del rango establecido y que conformarán la Población Inicial, que se puede representar como

$$\begin{bmatrix} (x_{11} & \cdots & x_{p1}) & sd_1 & ta_1 \\ (x_{12} & \cdots & x_{p2}) & sd_2 & ta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{1n} & \cdots & x_{pn}) & sd_n & ta_n \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3. Mutación

Todos los individuos de la población son sometidos a una mutación, la cual consiste en la suma de sd a cada elemento del mismo (Sección 2.4), con excepción de ta , esto producirá una nueva población la cual se denomina Población Mutada.

4. Evaluación

Cada individuo mutado es evaluado en la Ecuación 3.24 que genera un nuevo tiempo de arribo ta distinto al individuo original. Los individuos con un tiempo de recorrido menor a los demás tienen más posibilidad de pasar a la siguiente generación y heredar sus características.

5. Selección

A partir de la Población Inicial y la Población Mutada se forma un solo conjunto de rayos, el cual es sometido a un torneo de selección para elegir a las mejores soluciones que formarán la siguiente generación. El torneo consiste en enfrentar a cada uno de los rayos del conjunto en un formato de todos contra todos, por lo que cada trayectoria del rayo es enfrentada con otra elegida al azar. El que tenga un tiempo menor de recorrido a través de los estratos significará que es mejor, de acuerdo a lo que se busca y recibirá un valor de victoria tantas veces como sea ganador torneo tras torneo. El 50 % de los individuos del conjunto que tengan menor tiempo de arribo, formaran la nueva Población Inicial en la siguiente generación.

Se han diseñado cuatro modelos para simular las trayectorias del rayo desde la fuente a cada uno de los geófonos, de manera que el tiempo de arribo sea mínimo. Cabe señalar que la Ecuación 3.8 está diseñada para estimar las trayectorias y tiempos de arribo en sísmica de refracción, en caso de querer abordar a mayor detalle la sísmica de reflexión así como modelos más complejos de sísmica de refracción, se recomienda consultar [Dávila Torres \(2012\)](#).

Modelo 1

El Modelo 1 está compuesto de 3 capas y un semiespacio con velocidad ascendente, una fuente en superficie ubicada en el centro y un arreglo de geófonos equidistantes a los costados de la misma. Los parámetros utilizados tanto para diseñar el Modelo 1 como para la Programación Evolutiva implementada son presentados en la Tabla 3.1. El número de variables a calcular para cada trayectoria fuente-geófono son 6 que asciende a 72 en total debido al número de geófonos utilizados (12). Cabe señalar que la información es obtenida de la última capa por lo que los tiempos de arribo calculados para este modelo no corresponderían a lo que es la realidad en un estudio de sísmica de refracción, para esto, se requiere tomar en cuenta la onda directa y obtener información de todas las capas del modelo. De la Figura 3.2 a la Figura 3.5 se puede apreciar la convergencia de todos los individuos a una misma solución con el pasar de las generaciones, el objetivo principal de este ejemplo es mostrar gráficamente el funcionamiento del algoritmo al momento de resolver el problema directo para sísmica de refracción.

Tabla 3.1: Parámetros utilizados para el Modelo 1.

Parámetros Modelo 1		
Estrato	Velocidad (m/s)	Profundidad
1	400 m/s	5 m
2	1500 m/s	13 m
3	2500 m/s	22 m
4	4500 m/s	-
Parámetros de PE		
Generaciones		100
Individuos		50
Espacio de búsqueda		$F - g_n$
Parámetros a estimar cada $F - g_n$		6

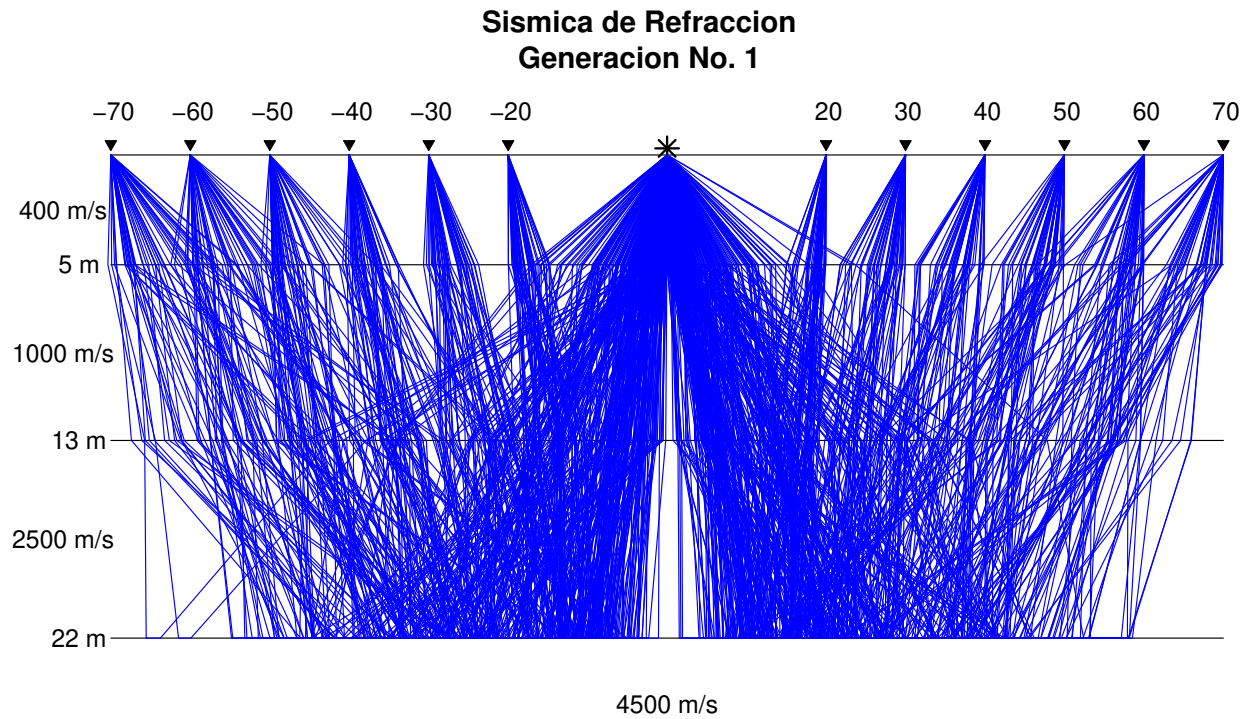


Figura 3.2: Población inicial del trazado de rayos para sísmica de refracción. Aplicado al modelo descrito en la Tabla 3.1

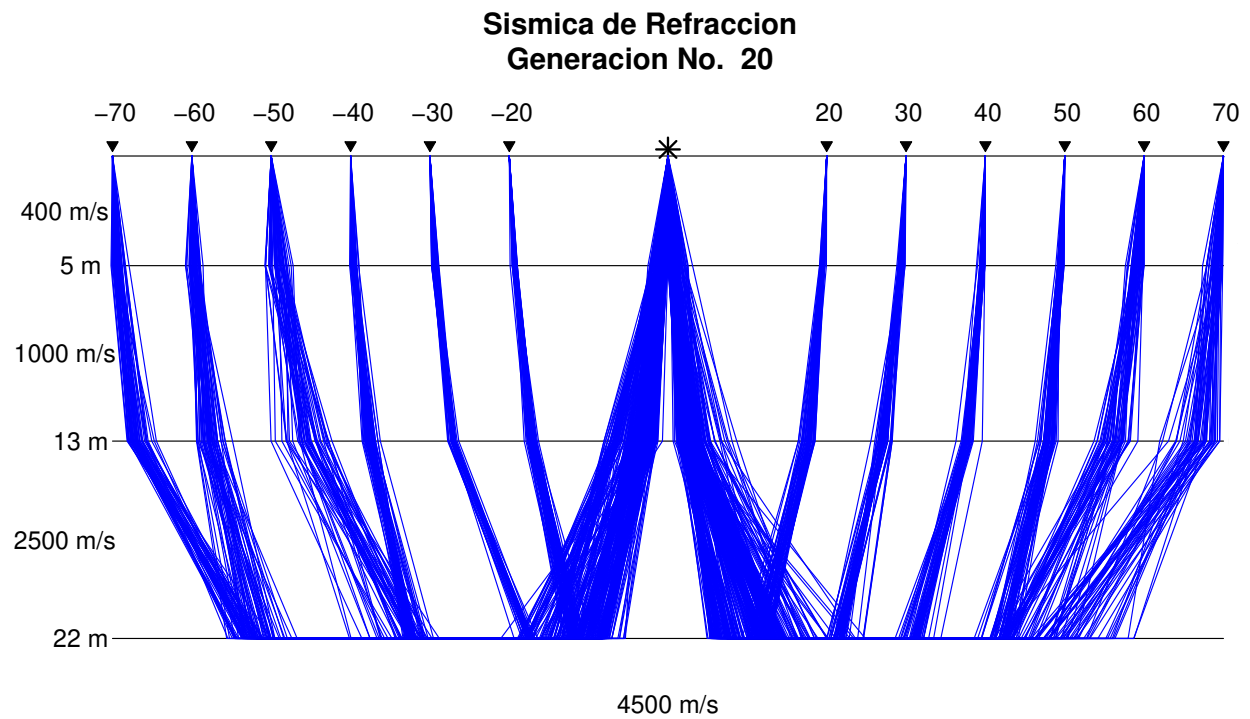


Figura 3.3: Trazado de rayos en la generación 20. Se puede apreciar la tendencia a seguir para cada trayectoria Fuente-Geófono en las siguientes generaciones.

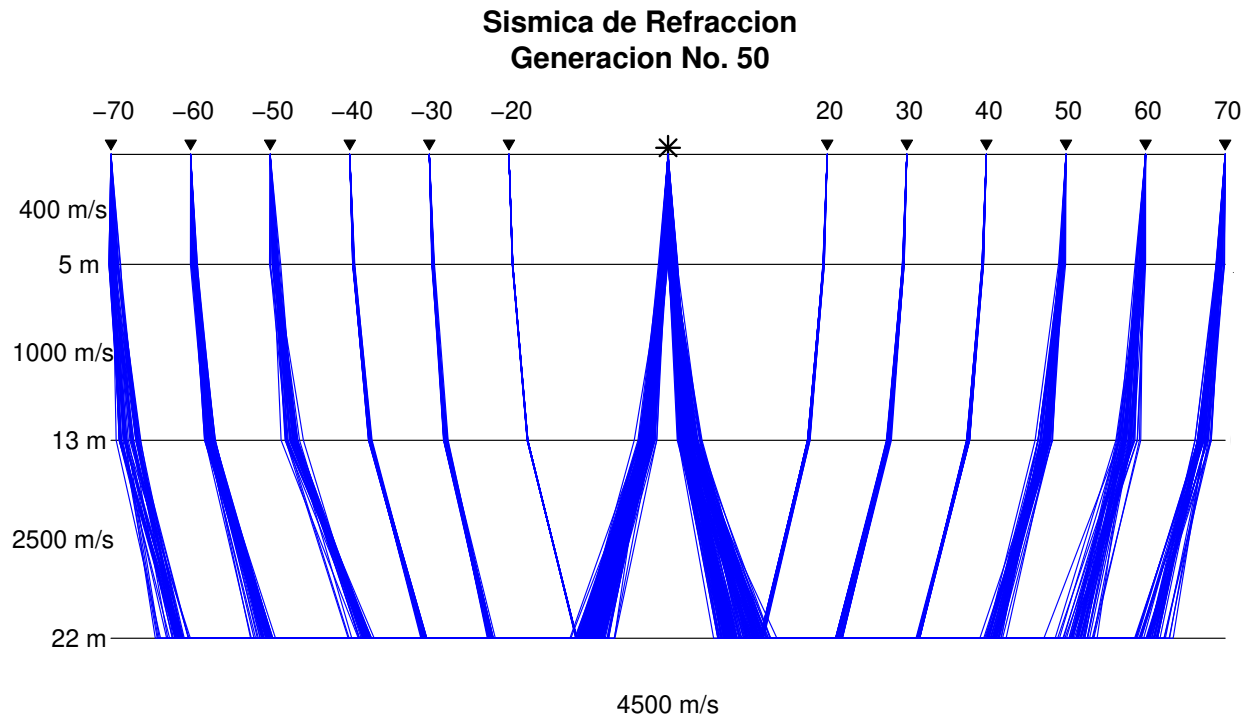


Figura 3.4: Trazado de rayos en la generación 50. Se presenta la convergencia de cada individuo en base al tiempo mínimo para cada trayectoria Fuente-Geófono.

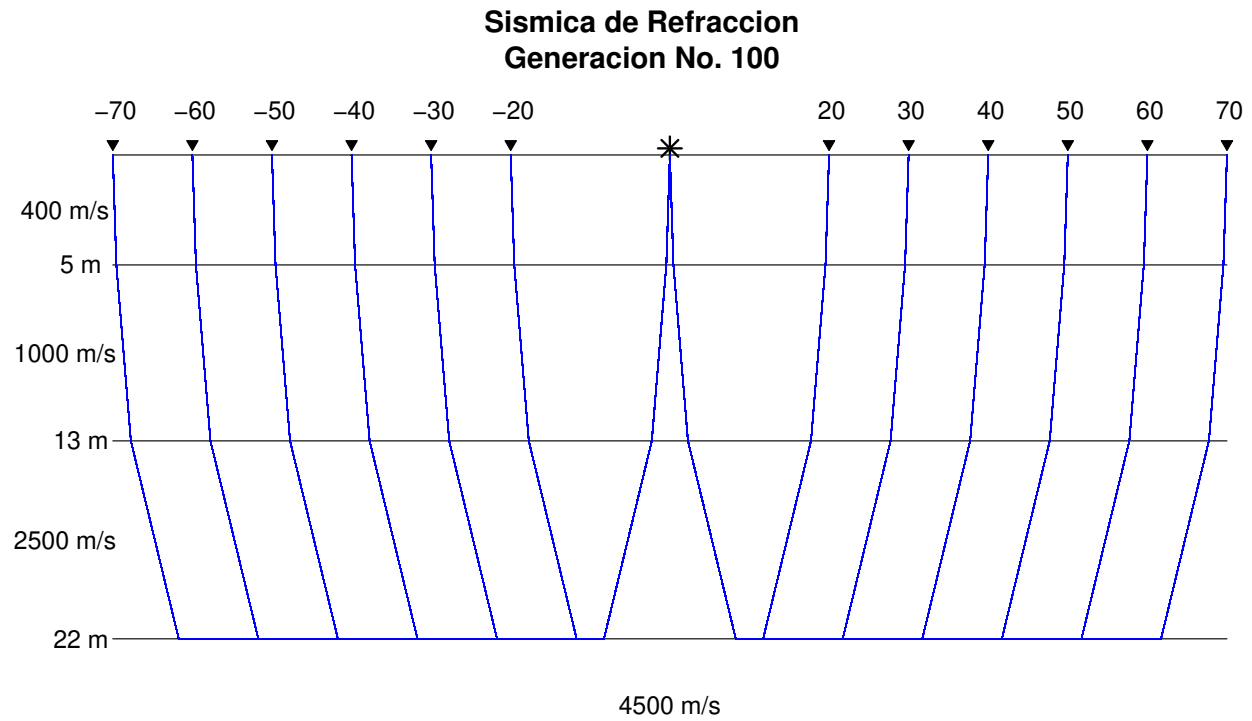


Figura 3.5: Trazado de rayos en la generación 100, todos los individuos han llegado a una misma solución al encontrar la trayectoria con el tiempo mínimo para cada distancia Fuente-Geófono.

Modelo 2

El Modelo 2 presenta interfaz con velocidades ascendentes (Tabla 3.2), el objetivo principal de este ejemplo es demostrar la eficacia y veracidad del algoritmo en el que se realiza un análisis más completo considerando la onda directa e información de todas las capas del subsuelo. Los tiempos de arribo presentados en Tabla 3.3 fueron tomados de la Tabla 3.1 de [Burger \(1992\)](#) y son comparados con los tiempos de arribo calculados mediante la optimización de la Ecuación 3.8 utilizada en este trabajo. En la Tabla 3.3 se presentan los resultados obtenidos en cada método implementado. Como se puede apreciar, existen diferencias mínimas entre los tiempos de arribo calculados, lo que comprueba la veracidad y eficacia del algoritmo implementado con PE. Se puede observar que a partir del geófono 30 la onda refractada llega a ser más rápida que la onda directa, ya que viaja con la velocidad de la segunda capa que es mayor a la primera. De manera gráfica esto se representa como un cambio en la tendencia lineal de los tiempos de arribo correspondientes para cada capa, como lo muestra la Figura 3.7. La Figura 3.6 muestra el resultado final para el trazado de rayos en la generación 50.

Tabla 3.2: Parámetros utilizados para el Modelo 2.

Parámetros Modelo 2		
Estrato	Velocidad (m/s)	Profundidad
1	1400 m/s	10 m
2	4500 m/s	-
Parámetros de PE		
Generaciones		50
Individuos		20
Espacio de búsqueda		$F - g_n$
Parámetros a estimar cada $F - g_n$		2

Tabla 3.3: Tiempos de arribo calculados para el Modelo 2 mediante el algoritmo de PE y comparados con los obtenidos de [Burger \(1992\)](#). Se puede apreciar como la onda refractada a partir del geófono 30 llega a ser más rápida que la onda directa.

Geófono (m)	Tiempo de arribo (ms)		
	Onda Directa	Onda Refractada Burger (1992)	Onda Refractada PE
3	2.14	14.24	14.45
6	4.29	14.91	14.91
9	4.29	14.91	14.91
12	8.57	16.24	16.24
15	10.71	16.91	16.91
18	12.86	17.58	17.58
21	15	18.24	18.24
24	17.14	18.91	18.91
27	19.29	19.58	19.58
30	21.43	20.24	20.24
33	23.57	20.91	20.91
36	25.71	21.58	21.58
39	27.86	22.24	22.24
42	30	22.91	22.91
45	32.14	23.58	23.58
48	34.29	24.24	24.24
51	36.43	24.91	24.91
54	38.57	25.58	25.58
57	40.71	26.24	26.24
60	42.86	26.91	26.91
63	45	27.58	27.58
66	47.14	28.24	28.24
69	49.29	28.91	28.91

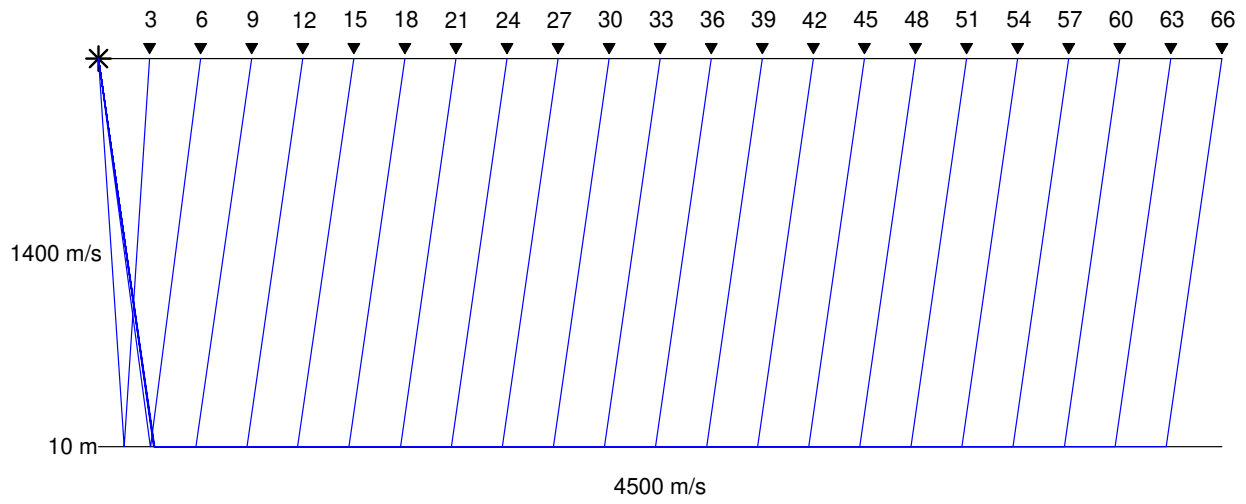


Figura 3.6: Trazado de rayos que viajan a través del estrato inferior del Modelo 2 a partir de las coordenadas obtenidas por el algoritmo de PE

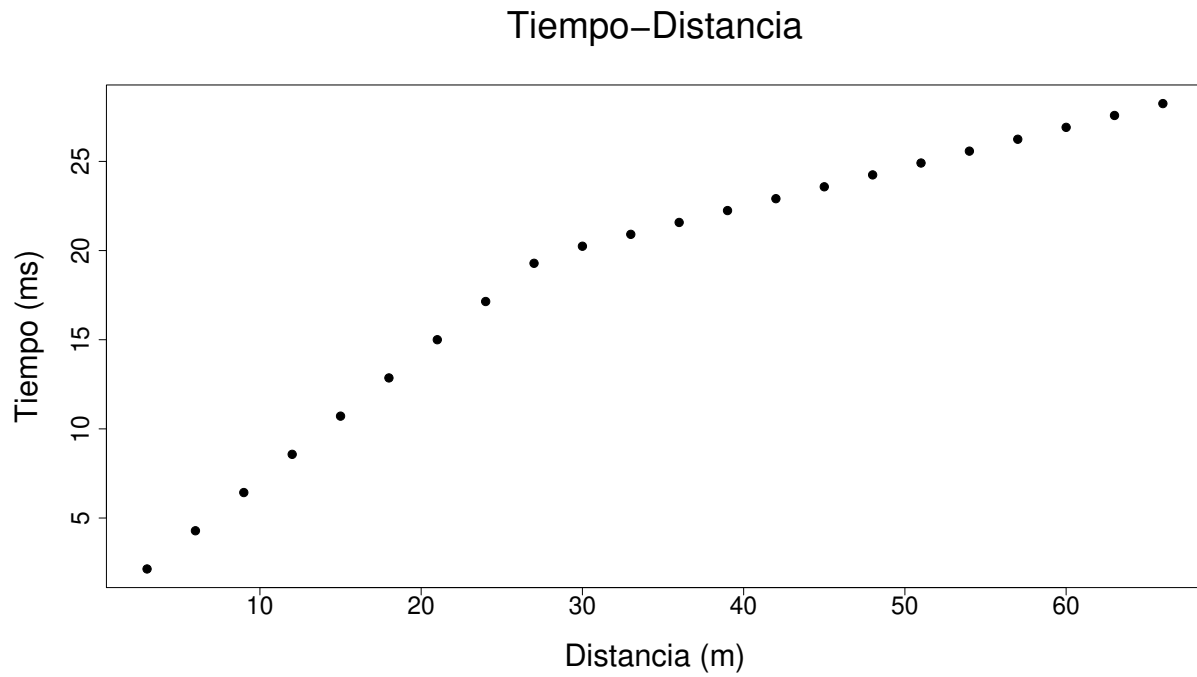


Figura 3.7: Tiempos de arribo graficados a partir del Modelo 2.

Modelo 3

El Modelo 3 es tomado de [Burger \(1992\)](#) en el que se considera un caso de 2 interfaces y un semi-espacio. El modelo incrementa sus velocidades y puede representar una zona con sedimentos no consolidados y consolidados que sobreyacen a un macizo rocoso (Tabla 3.4). La Figura 3.9 muestra el cambio en la tendencia de los tiempos de arribo correspondientes a cada capa.

Tabla 3.4: Parámetros utilizados para el Modelo 3.

Parámetros Modelo 3		
Estrato	Velocidad (m/s)	Profundidad
1	400 m/s	15 m
2	2000 m/s	50 m
3	5000 m/s	-
Parámetros de PE		
Generaciones		200
Individuos		20
Espacio de búsqueda		$F - g_n$

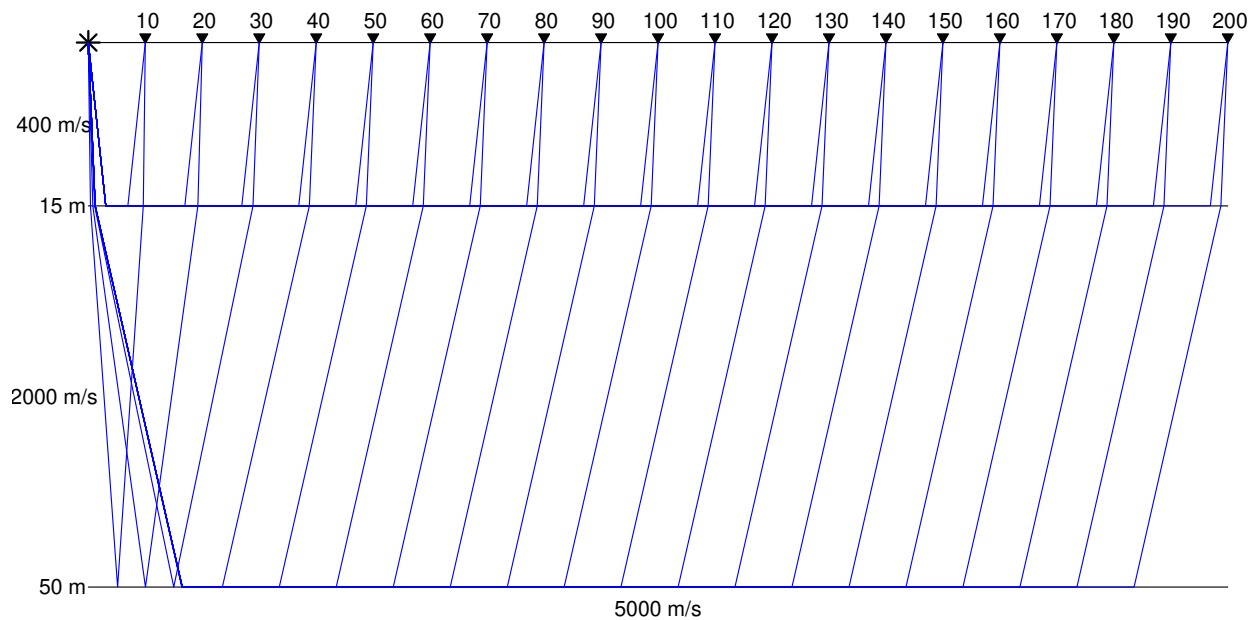


Figura 3.8: Trazado de rayos que viajan a través de todos los estratos presentes en el Modelo 3.

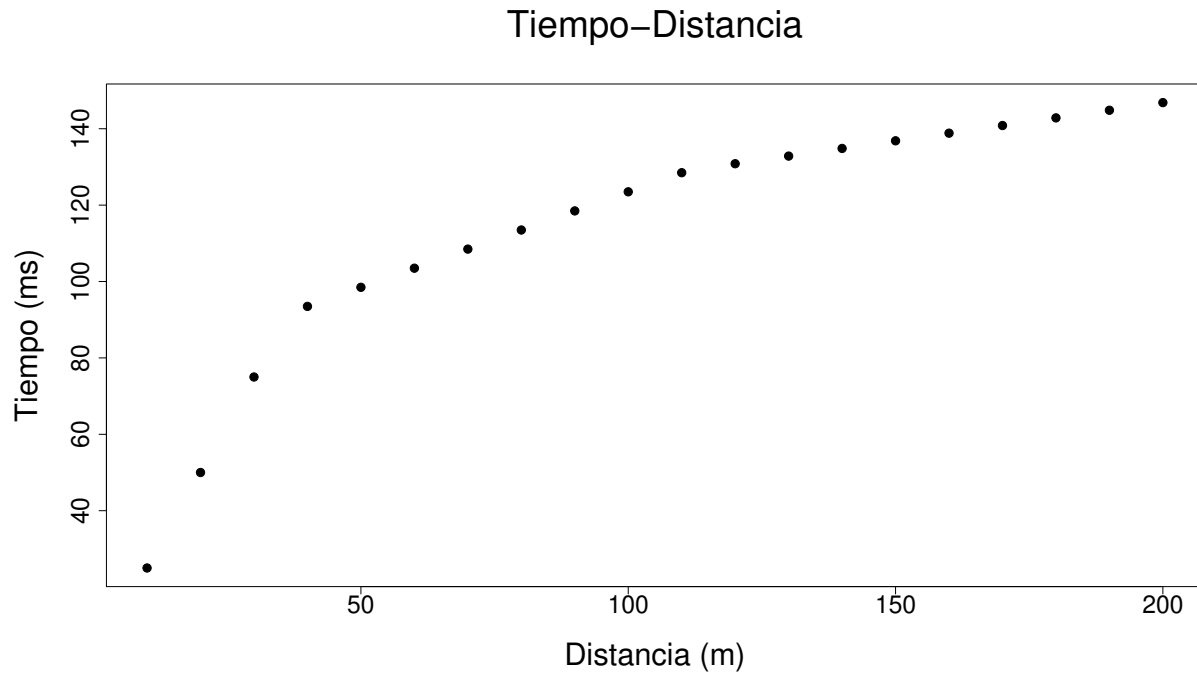


Figura 3.9: Tiempos de arribo graficados a partir del Modelo 3 (Figura 3.8).

Se interpreta una curva de tiempo de arribo como el da la Figura 3.9 representando un caso de tres capas, ya que se tienen tres segmentos de línea recta, cada uno con una pendiente más baja que la más cercana a la fuente de energía. Las velocidades para cada capa están disponibles a partir de la curva al igual que los espesores de las dos primeras capas. A partir de esta información y de algún conocimiento general de la geología local, se puede llegar a un modelo razonable para la geología superficial en el sitio de exploración.

Modelo 4

Para el Modelo 4 se toman 3 interfaces y un semi-espacio, lo que aumenta la cantidad de variables a calcular que asciende a 288 considerando el número de capas y geófonos. En la Figura 3.10 se muestra el resultado del modelado directo de sísmica de refracción. En la Figura 3.11 se presentan los tiempos de arribo calculados.

Tabla 3.5: Parámetros utilizados para el Modelo 4.

Parámetros Modelo 4			
Estrato	Velocidad (m/s)	Profundidad	Buzamiento
1	500 m/s	5 m	0°
2	1000 m/s	15 m	0°
3	2000 m/s	30	0°
4	4000 m/s	-	-
Parámetros de PE			
Generaciones		200	
Individuos		20	
Espacio de búsqueda		$F - g_n$	

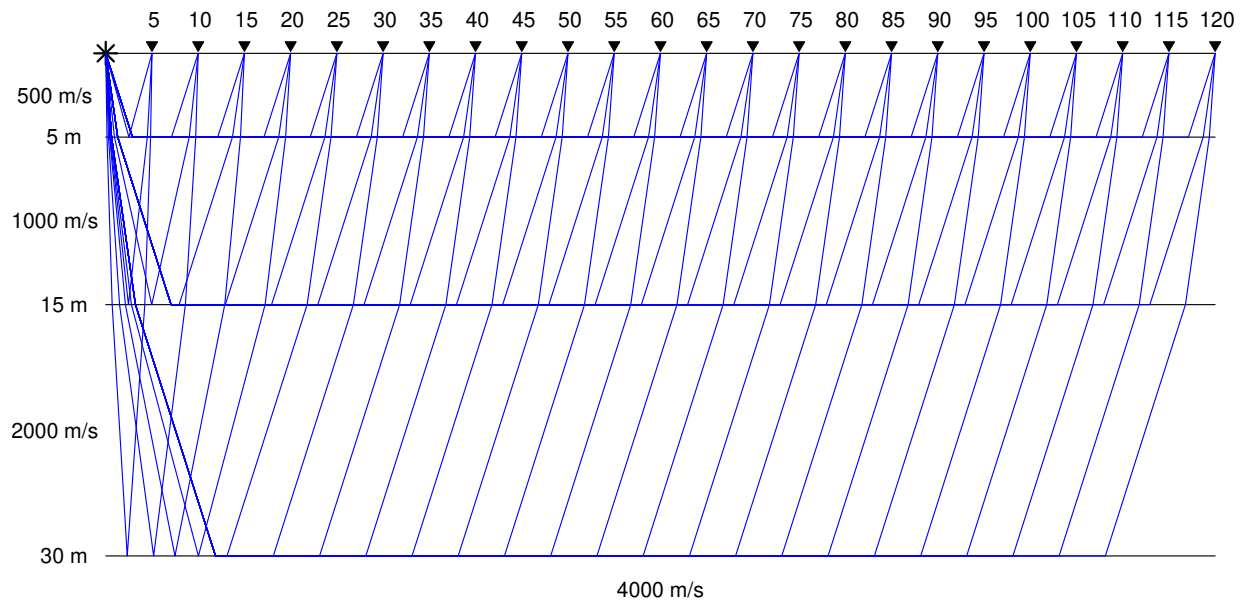


Figura 3.10: Trazado de rayos sísmicos que viajan a través de todos los estratos del Modelo 4.

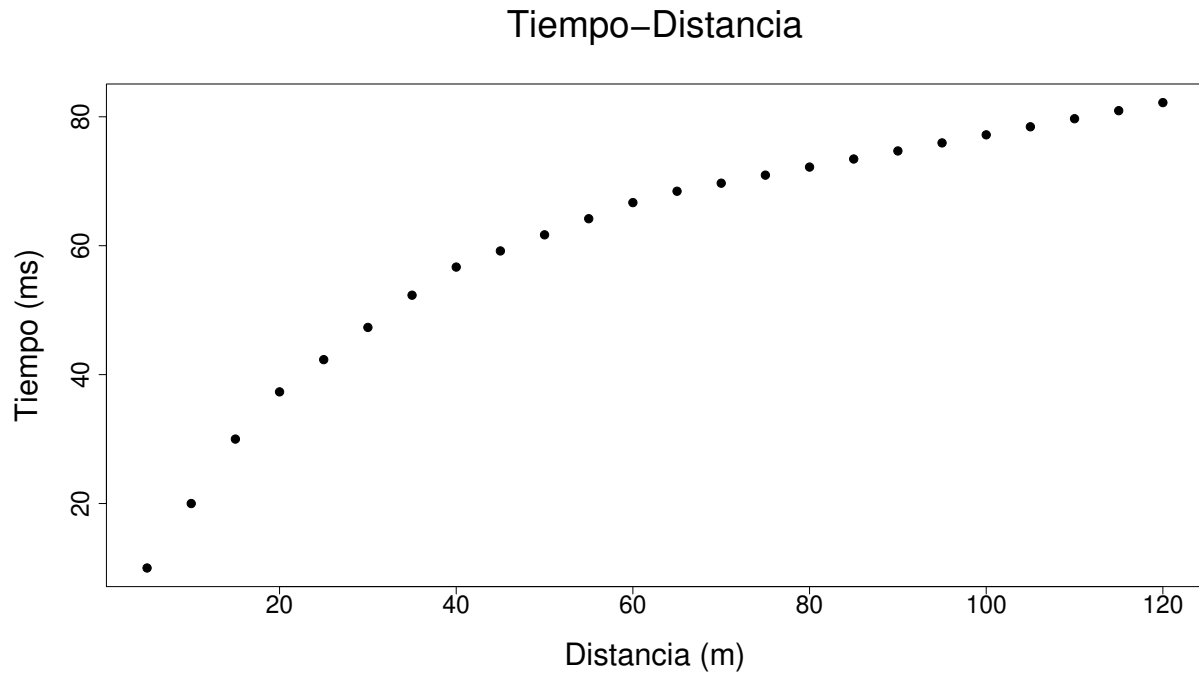


Figura 3.11: Tiempos de arribo calculados para el Modelo 4.

3.2.3. Modelado inverso de Sísmica de Refracción utilizando Programación Evolutiva

Se ha definido el modelo geológico utilizado para simular la trayectoria del rayo y así obtener los tiempos de arribo correspondientes para cada distancia fuente-geófono. Esta información generada (datos sintéticos) será utilizada como base para probar la efectividad del algoritmo de inversión. El primer paso consiste en definir el número de capas del modelo (Figura 3.1), cuya posición de la fuente se ubica al extremo izquierdo del perfil. Se utilizaron modelos de capas horizontales con el fin de obtener los datos para inferir los parámetros geológicos mediante la optimización de la Ecuación 3.8. La mutación implementada en los problemas analizados anteriormente ha sido la mutación Gaussiana (Subsección 2.3.1), cabe señalar que el rendimiento de un algoritmo depende directamente de este operador que puede ser modificado para cada problema a resolver con el objetivo principal de reducir la tendencia a quedar atrapado en un mínimo local y explorar todo el espacio de soluciones. Para este caso se obtuvieron mejores resultados con una mutación completamente diferente, misma que se analizará a continuación. Para esto, se procede a definir los operadores de Programación Evolutiva.

1. Representación del individuo

Los parámetros del modelo a inferir son la velocidad v del medio por el que viaja la onda, la profundidad h del estrato y la coordenada x que representa la posición por la cual el rayo pasa de una interface a otra, se tendrán $nc * 2$ (donde nc representa el número de capas) posiciones de x por cada geófono para el caso de refracción sísmica. El individuo es representado como un vector de número reales, los cuales se generan aleatoriamente dentro del rango de búsqueda para cada parámetro.

$$\left[(x_1 \cdots x_{nc*2}), (v_1 \cdots v_{nc}), (h_1 \cdots h_{nc}), rms \right] \quad (3.11)$$

el rms está dado por la ecuación (2.13).

2. Población Inicial

Se generan aleatoriamente, en un espacio de búsqueda y con distribución uniforme, los parámetros de un conjunto de individuos de la primera generación (Población Inicial) los cuales son evaluados en la (2.13) arrojando un valor rms para cada uno de ellos.

3. Mutación

El operador presentado para implementar la mutación, está basado en (Marroquín Navarro, 2012), a partir del cual se genera un cambio en una posición del rayo sísmico, esto hace posible mantener una diversidad que permita al algoritmo escapar de mínimos locales. Se presentan dos principales cambios, en el primero se elige una posición al azar entre $[(v_1 \cdots v_n), (h_1 \cdots h_n)]$, posteriormente se calcula la distancia entre el valor elegido y cada uno de los extremos del rango de búsqueda dado. Una vez realizado lo anterior, se selecciona la distancia más corta y se obtiene el porcentaje de movimiento que se suma o resta a la posición a mutar obteniendo un rango $[a, b]$ que permitirá el movimiento o el cambio en el parámetro mutado, asegurando que al momento de aplicar el porcentaje de movimiento nunca se saldrá de los rangos establecidos. El segundo cambio ocurre en las posiciones $[(x_1 \cdots x_{nc*2})]$, en el punto donde el rayo se refracta en su totalidad. La mutación empleada es la misma utilizada en los parámetros a inferir, con la excepción de que el porcentaje de movimiento se determina encontrando la distancia más corta entre la posición anterior y posterior de la x seleccionada, obteniendo el rango cerrado $[a, b]$ mostrado en la Figura 3.12, el cual permite que la mutación no salga de los rangos establecidos.

4. Evaluación

Los parámetros mutados son evaluados en (3.8) y posteriormente en (2.13) generando un nuevo valor *rms* para cada individuo.

5. Selección

La selección utilizada para escoger a las mejores soluciones es la misma descrita en la Sección 2.4.

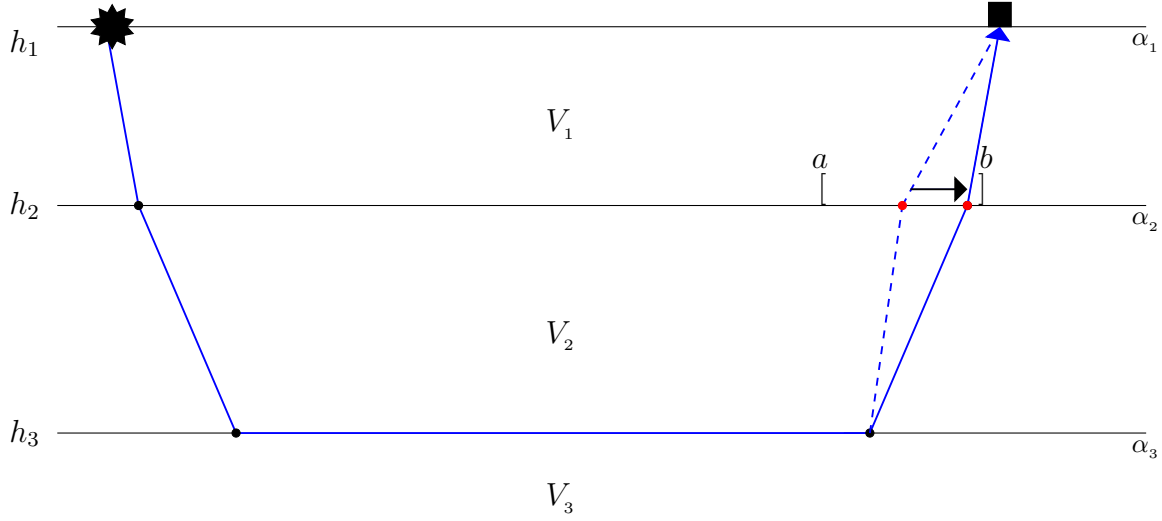


Figura 3.12: Representación de un individuo o rayo sísmico mutado que viaja a través de un modelo de velocidades.

3.3. Sondeo Eléctrico Vertical (SEV)

3.3.1. Modelado Directo de SEV

En el contexto de la prospección geoelectrica planteamos el problema directo en la práctica del SEV en los siguientes términos: determinar la curva de resistividad aparente que se obtiene en la superficie de un medio estratificado de manera horizontal (Pous, 1983). El potencial a una distancia r debido al punto medio de corriente I en superficie puede ser expresado como

$$V = \frac{I}{2\pi} \int_0^\infty k(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.12)$$

donde $J_0(\lambda r)$ es la función Bessel de orden cero, y $k(\lambda)$ es la función *kernel*. La resistividad aparente para un arreglo Schlumberger esta dada por

$$\rho_a = \rho_1 s^2 \int_0^\infty k(\lambda) J_1(\lambda s) d\lambda \quad (3.13)$$

donde

ρ_a = resistividad aparente

s = semiespacio entre electrodos de corriente, $AB/2$

ρ_1 = resistividad de la primera capa

λ = parámetro de integración de dimensión $1/s$

k = función *kernel*

J_1 = función de Bessel de primer orden

Es conocido que la función *kernel* se determina imponiendo las condiciones de frontera una vez que los parámetros de espesor y resistividad de cada capa han sido escogidos para obtener su expresión se utiliza la relación recursiva de Pekeris (1940) que está dada por

$$k_i = \frac{k_{i+1} + P_i \tanh(\lambda t_i)}{P_i + k_{i+1} \tanh(\lambda t_i)} \quad (3.14)$$

donde

$t_i = h_i - h_{i-1}$ = espesor de la capa

$$P_i = \frac{\rho_i}{\rho_{i+1}} = \text{razón entre las resistividades}$$

en términos de la transformada de resistividad ($T_i = \rho_i k_i$) (Koefoed, 1968), la Ecuación 3.14 puede ser reescrita como

$$T_i = \frac{T_{i+1} + \rho_i \tanh(\lambda t_i)}{1 + \frac{T_{i+1} \tanh(\lambda t_i)}{\rho_i}} \quad (3.15)$$

Las resistividades y espesores que definen el corte geoelectrico están contenidos como parámetros en la función T , cuya expresión depende del número de capas considerado. A raíz de la publicación de Ghosh (1971) se demostró que la relación entre la resistividad aparente y la función transformada de resistividad podría verse a través de un filtro lineal, cuya función característica es independiente de los parámetros del corte geoelectrico. La convolución de los valores de resistividad aparente $\rho_a(\lambda)_n$ con los coeficientes del filtro (f_j) produce los valores de la transformada de resistividad $T_n(\lambda)$ en un punto n . Esto se afirma en la siguiente ecuación de convolución digitalizada

$$T_n(\lambda) = \sum_{j=1}^N f_j \rho_a(\lambda)_{n-j} \quad (3.16)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Para obtener los valores de resistividad aparente, el primer paso es calcular los valores de transformada de resistividad para un medio estratificado en los puntos $T_n(0, 1, 2, \dots)$ utilizando la relación recursiva de Pekeris (3.14). Posteriormente, el valor de resistividad aparente para un punto n es calculado utilizando

$$\rho_a(\lambda)_n = \sum_{j=1}^N f_j T(\lambda)_{n-j} \quad (3.17)$$

En la Tabla 3.6 se muestran los coeficientes del filtro digital “corto” que Ghosh (1971) propone para un arreglo Schlumberger.

Tabla 3.6: Coeficientes del filtro digital “corto” de Ghosh para un arreglo Schlumberger.

α_{-2}	α_{-1}	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
-0.0723	0.3999	0.3492	0.1675	0.0858	0.0358	0.0198	0.0067	0.0076

Guptasarma (1982) propuso un método de optimización para crear filtros lineales de corta longitud, con el cual se logró incrementar la precisión para los cálculos de resistividades

aparentes. El modelado de la curva de resistividad aparente en esta investigación fue realizado haciendo uso de un filtro Guptasarma de 11 puntos cuyos coeficientes se muestran en la Tabla 3.7 ([Sánchez Priego, 2012](#)).

Tabla 3.7: Coeficientes del filtro Guptasarma de 11 puntos.

Abscisa (base-10)	Abscisa (base-e)	Coeficientes del filtro
-0.420 625	-0.968 524 854 74	0.041 873
-0.202 656 25	-0.466 633 260 21	-0.022 258
0.015 312 5	0.035 258 334 23	0.387 66
0.233 281 25	0.537 149 928 69	0.647 103
0.451 25	1.039 041 523 21	1.848 73
0.669 218 75	1.540 933 117 65	-2.960 84
0.887 187 5	2.042 824 712 17	1.358 412
1.105 156 25	2.544 716 306 69	-0.377 59
1.323 125	3.046 607 901 13	0.097 107
1.541 093 75	3.548 499 495 63	-0.024 243
1.759 062 5	4.050 391 090 11	0.004 046

Para evaluar la resistividad aparente en un arreglo Schlumberger con un espaciado s primero se determina $T(\lambda)$ para $r = 1, \dots, N$, utilizando

$$\lambda_r = 10^{a_r} - \log_{10} s \quad (3.18)$$

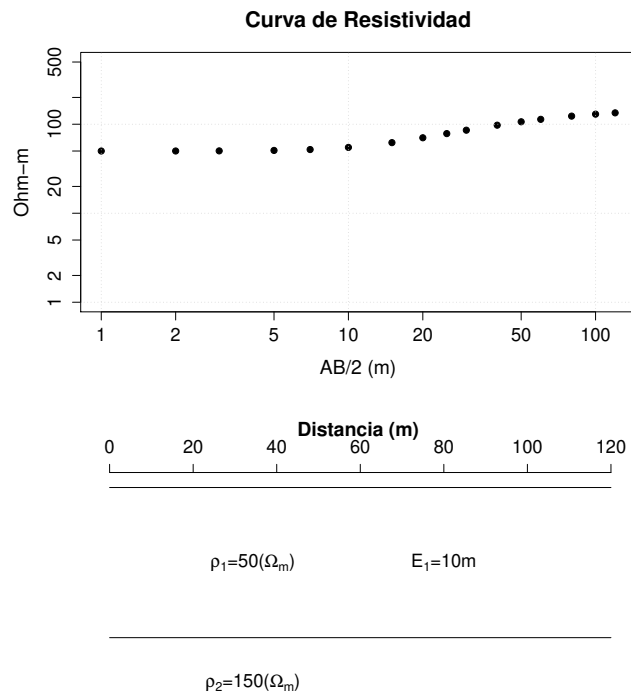
donde a_r son los valores de la abscisa en base-10 que se muestran en la Tabla 3.7. Los valores de resistividad aparente son dados por

$$\rho_\alpha = \sum_{r=1}^N f_r T(\lambda_r) \quad (3.19)$$

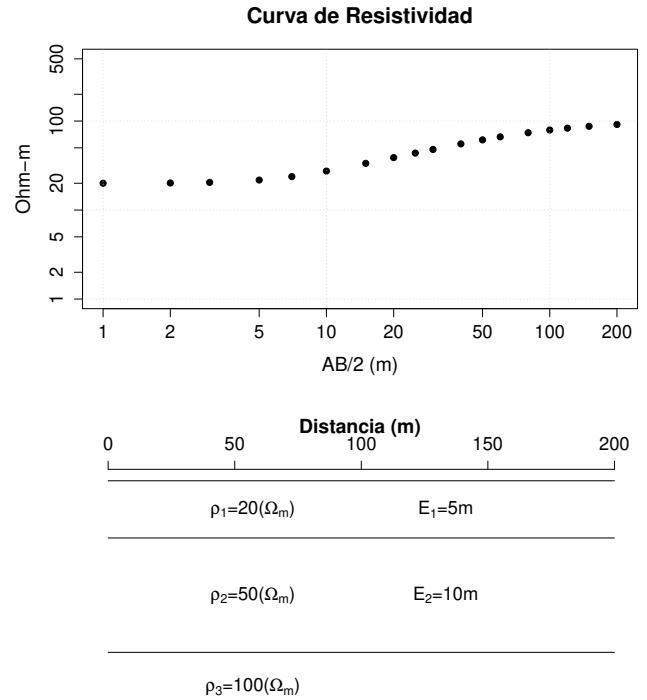
donde f_r representa los coeficientes del filtro [Guptasarma \(1982\)](#). Para utilizar los valores de la abscisa en base e , λ_r debe ser calculada como

$$\lambda_r = e^{a_r} - \log_e s \quad (3.20)$$

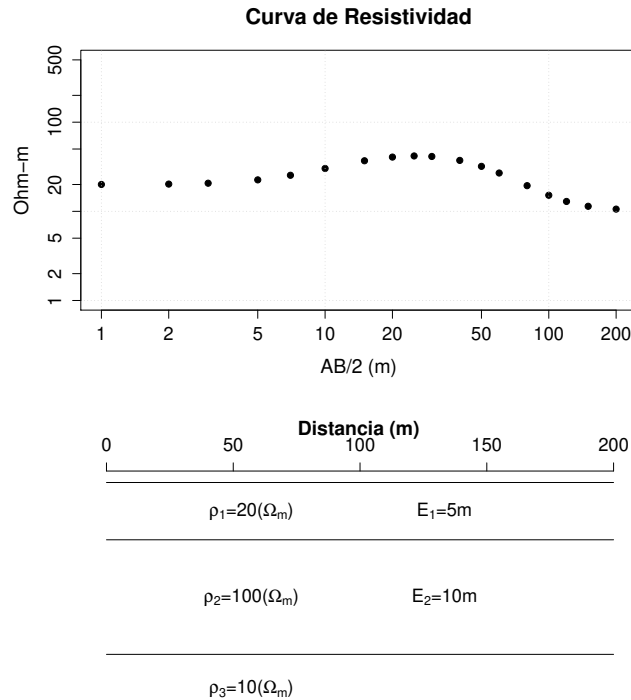
En la Figura 3.13 se muestran distintos modelos estratificados del subsuelo con sus respectivos valores de resistividad aparente.



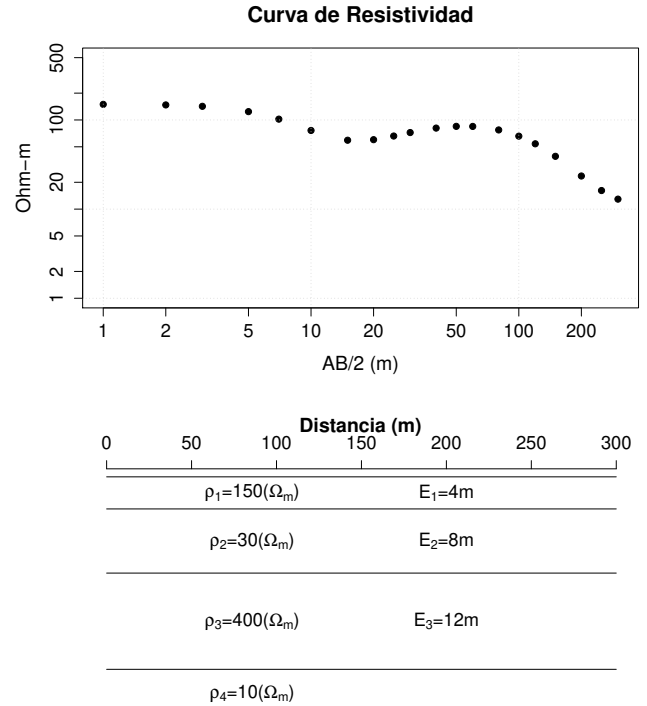
(a) Curva de resistividad para un modelo de 2 capas.



(b) Curva de resistividad Tipo A.



(c) Curva de resistividad Tipo K.



(d) Curva de resistividad Tipo HK

Figura 3.13: Curva de resistividad aparente para distintos modelos estratificados del subsuelo. Se pueden apreciar algunas de las nomenclaturas utilizadas para la interpretación, en caso de abordar a mayor detalle este tema se recomienda consultar [Telford *et al.* \(1990\)](#) o [Kearey *et al.* \(2013\)](#)

3.3.2. Modelado Inverso de SEV utilizando Programación Evolutiva

El objetivo de la inversión de resistividad aparente es estimar los espesores y resistividades de las capas del modelo diseñado para datos sintéticos o del subsuelo en donde se realizó el estudio para datos reales. Utilizando la función de modelado directo (Ecuación 3.19) se generaron datos sintéticos de resistividad aparente para un conjunto predeterminado de 20 valores de $AB/2$, (Levent y Demirci, 2008) los cuales fueron utilizados para estimar los parámetros del medio estratificado propuesto.

Para realizar la inversión de SEV's, la Programación Evolutiva fue implementada de la siguiente manera:

1. Representación del individuo

Individuo cuya cantidad de parámetros se aumenta dependiendo del número de estratos del modelo (nc). Se representa de la siguiente manera:

$$\left[\rho_1 \cdots \rho_{nc}, E_1 \cdots E_{nc-1}, sd, rms \right] \quad (3.21)$$

donde ρ_{nc} y E_{nc-1} son los parámetros a estimar para cada individuo n , sd es la desviación estándar para la mutación Gaussiana y

$$rms = \frac{(\sum_{i=1}^N (\rho_{\alpha} - \hat{\rho}_{\alpha})^2)^{1/2}}{N^{1/2}} \quad (3.22)$$

donde $\hat{\rho}_{\alpha}$ son los valores calculados de resistividad aparente y N = número de datos, la Ecuación 3.22 es la función a minimizar (Levent y Demirci, 2008) ya que se busca una diferencia mínima entre los datos observados y calculados.

2. Población Inicial

Se generan aleatoriamente, en un determinado espacio de búsqueda, las desviaciones estándar sd y los parámetros de un conjunto de individuos de la primera generación (Población Inicial) los cuales son evaluados en la Ecuación 3.22 arrojando un valor rms para cada uno de ellos. Es de esperar que en este caso el valor no sea óptimo ya que el proceso es realizado completamente al azar.

$$\begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{nc1}, & E_{11} & \cdots & E_{(nc-1)1}, & sd_1, & rms_1 \\ \rho_{12} & \cdots & \rho_{nc2}, & E_{12} & \cdots & E_{(nc-1)2}, & sd_2, & rms_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1n} & \cdots & \rho_{ncn}, & E_{1n} & \cdots & E_{(nc-1)n}, & sd_n, & rms_n \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3. Mutación

Todos los individuos de la población son sometidos a una mutación que modifica el valor de sus parámetros, por lo que se genera una nueva población de iguales dimensiones a la Población Inicial, la cual se denomina Población Mutada.

4. Evaluación

Los parámetros mutados son evaluados en (3.19) y posteriormente en (3.22) generando un nuevo valor rms para cada individuo. Los individuos con valores rms más bajos tendrán más probabilidad de pasar a la siguiente generación.

5. Selección

La selección utilizada para este problema es la misma descrita en la Sección 2.4.

3.4. Inversión Conjunta

La inversión de datos geofísicos consiste en operar directamente sobre los datos para obtener una perspectiva de la estructura que los generan. Se diferencia del enfoque tradicional directo de interpretación geofísica en la que se asume un modelo, se calcula su respuesta y se compara con las observaciones; posteriormente los parámetros del modelo se modifican de una manera que se espera mejorar el ajuste de datos. La adaptación de la inversión conjunta es la consecuencia directa de los métodos complejos de interpretación en geofísica junto con el desarrollo de los métodos de inversión. El término se ha aplicado en la literatura para la inversión de datos medidos por diferentes principios físicos. Por ejemplo para la exploración superficial, generalmente se representa la inversión conjunta da datos sísmicos y geoelectricos. [Vozoff y Jupp \(1974\)](#) introdujeron tal método mediante la combinación de datos resistivos y magnetotelúricos, observando una mejor resolución en los parámetros del modelo estimado. Las limitaciones de las técnicas individuales pueden reducirse en gran medida adoptando esquemas de inversión conjunta. Diferentes cantidades físicas pueden

integrarse en una inversión conjunta, si al menos los datos medidos están influenciados por un subconjunto de parámetros comunes. Para el caso de datos sísmicos y geoelectricos que representan respuestas físicamente diferentes, el espesor de capa puede funcionar como un parámetro común en ambos. Los límites entre dos capas de diferentes resistividades y velocidades sísmicas puede no coincidir. Por lo tanto, puede ocurrir que, el número de capas derivadas por inversión individual de datos sísmicos y geoelectricos no sean idénticos. Para los modelos analizados en el presente trabajo, se asume que las interfaces de capas son las mismas para las propiedades geoelectricas y sísmicas, con el objetivo de asegurar que los datos de cada método pueden combinarse en un esquema de inversión conjunta esperando reducir en gran medida la singularidad e inestabilidad del problema, cabe señalar que el *rms* utilizado es el presentado por [Levent y Demirci \(2008\)](#).

3.4.1. Esquema de Inversión Conjunta mediante PE

Una vez analizada la inversión para cada método, se han identificado las funciones de modelado directo e individuos para cada uno de ellos, los cuales están representados de la siguiente manera

Sísmica de Refracción

Función para modelado directo

$$\begin{aligned}
 tiempo = & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + ((m_{i+1}x_{i+1} + h_{i+1}) - (m_i x_i + h_i))^2}}{V_i} + \\
 & \frac{\sqrt{(x_{n+2} - x_{n+1})^2 + ((m_{n+1}x_{n+2} + h_{n+1}) - (m_{n+1}x_{n+1} + h_{n+1}))^2}}{V_{n+1}} + \\
 & \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{(x_{n+2+i} - x_{n+1+i})^2 + ((m_{n+1-i}x_{n+2+i} + h_{n+1-i}) - (m_{n+2-i}x_{n+1+i} + h_{n+2-i}))^2}}{V_{n+1-i}}
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Individuo utilizado en PE para el modelado inverso

$$\left[(x_1 \cdots x_{nc*2}), (v_1 \cdots v_{nc}), (h_1 \cdots h_{nc}), rms \right] \tag{3.25}$$

para cada capa nc , x denota las coordenadas por donde pasa el rayo de una interface a otra, h la profundidad y v la velocidad. Para $m = 0$, considerando que los modelos analizados se presentan en capas horizontales.

Sondeo Eléctrico Vertical

Función para modelado directo

$$\rho_\alpha = \sum_{r=1}^N f_r T(\lambda_r) \quad (3.26)$$

En un arreglo Schlumberger para un espaciado s primero se determina $T(\lambda)$, dada por la Ecuación 3.15, para $r = 1, \dots, N$, utilizando

$$\lambda_r = 10^{a_r - \log_{10} s} \quad (3.27)$$

donde a_r son los valores de la abscisa en base-10 que se muestran en la Tabla 3.7.

Individuo utilizado en PE para el modelado inverso

$$\left[(\rho_1 \ \cdots \ \rho_{nc}), \ (E_1 \ \cdots \ E_{nc-1}), \ rms \right] \quad (3.28)$$

donde ρ_{nc} es la resistividad y E_{nc} el espesor para cada capa nc .

Se propone un algoritmo de aplicación conjunta con un enfoque multi-secuencial para invertir datos de tiempo de arribo en refracción sísmica y resistividad aparente en sondeo eléctrico vertical para la delimitación de manera simultánea de la velocidad, resistividad y profundidad de cada una de las interfaces. Considerando que el espesor de capas es el parámetro en común para ambos y que la inversión es realizada mediante Programación Evolutiva, el individuo se representa de la siguiente manera:

$$\left[(x_1 \ \cdots \ x_{nc*2}), \ (v_1 \ \cdots \ v_{nc}), \ (h_1 \ \cdots \ h_{nc}), \ (\rho_1 \ \cdots \ \rho_{nc}), \ rms \right] \quad (3.29)$$

el rms utilizado para obtener la diferencia mínima entre datos observados y calculados fue el siguiente:

$$rms = \frac{(\sum_{i=1}^N (dato_{obs} - dato_{cal})^2)^{1/2}}{N^{1/2}} \quad (3.30)$$

donde N = número de datos. Aunque la inversión presentada en Sísmica de Refracción es por medio de Programación Evolutiva, es oportuno considerar las técnicas existentes para

determinar profundidades y velocidades ([Burger, 1992](#)), esto con la finalidad de obtener una mejor estimación de parámetros.

3.5. Resumen

En este capítulo se realizó un análisis de cada una de las funciones utilizadas para resolver el modelado directo en Refracción (Ecuación 3.8) y SEV (Ecuación 3.19) que relacionan los tiempos de arribo y los valores de resistividad aparente con los parámetros del modelo que son la velocidad, la profundidad y resistividad de los estratos.

Posteriormente se presenta una descripción detallada de cada uno de los operadores de Programación Evolutiva para resolver el problema inverso de cada método de manera individual. Por último se presenta un esquema de inversión conjunta relacionando la profundidad como parámetro en común para Refracción y SEV. En el Capítulo 4 se presentan las pruebas de inversión de datos a las que fue sometido el algoritmo.

Capítulo 4

Análisis y Resultados

4.1. Introducción

A continuación se muestran los resultados de la inversión aplicada a distintos modelos estratificados del subsuelo. Por medio de la Ecuación 3.24 para Sísmica de Refracción y la Ecuación 3.19 para Sondeos Eléctricos Verticales fueron generados los datos sintéticos a los cuales se les agregó un cierto porcentaje de ruido gaussiano. Para cada modelo sometido a prueba se obtuvo un conjunto de 4 gráficas para comprender de una mejor manera el funcionamiento del algoritmo utilizado, mostrando la solución final de la inversión:

- a) Gráfica Tiempo-Distancia, la cual muestra los tiempos de arribo calculados por medio de la optimización de la Ecuación 3.24 utilizando PE.
- b) Curva de resistividad aparente del modelo analizado, calculada mediante el filtro lineal de 11 puntos de Guptasarma.
- c) Gráfica RMS que muestra el error entre los datos observados y calculados en cada generación.
- d) Modelo estimado a partir de los parámetros calculados en la inversión, que corresponde al mejor individuo de cada generación.

Se realizó la inversión de 7 modelos con distintos grados de complejidad para validar la efectividad del algoritmo, los parámetros a estimar son la Velocidad, la Resistividad y la Profundidad del estrato.

4.2. Inversión de Datos

Como primer ejemplo se presenta un caso de 2 capas (Figura 4.1) para mostrar la evolución de una población de 100 individuos a lo largo de 300 generaciones que se muestran desde la Figura 4.2 hasta la Figura 4.6. La evolución muestra la convergencia de una gran cantidad de individuos a una misma solución. El modelo estimado presentado en la gráfica corresponde al mejor individuo de cada generación. En la primera generación se observa como la población inicial explora todo el espacio de soluciones de manera uniforme por lo que el modelo estimado se encuentra bastante alejado de la solución real. En la Tabla 4.1 se presentan los parámetros utilizados en la PE.

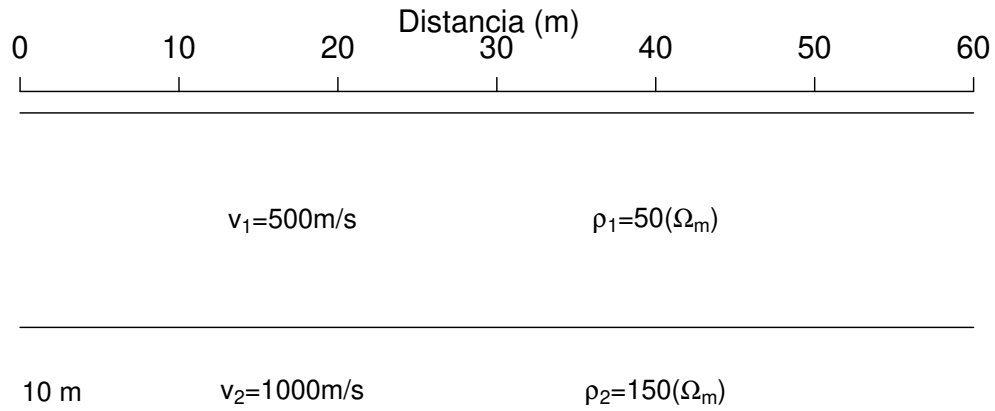


Figura 4.1: Parámetros del Modelo 1, de 2 capas con resistividades y velocidades en orden ascendente.

Tabla 4.1: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 1, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Velocidad	EB Resistividad
300	100	0-50 m	0-2000 m/s	0-300 Ω -m

Es importante señalar que en Sísmica de Refracción se tomaron los tiempos de arribo refractados en la segunda capa para un arreglo de 12 geófonos distribuidos a lo largo de 60m; para el SEV se tomó la curva de resistividad aparente generada por el medio estratificado.

Generación No. 1

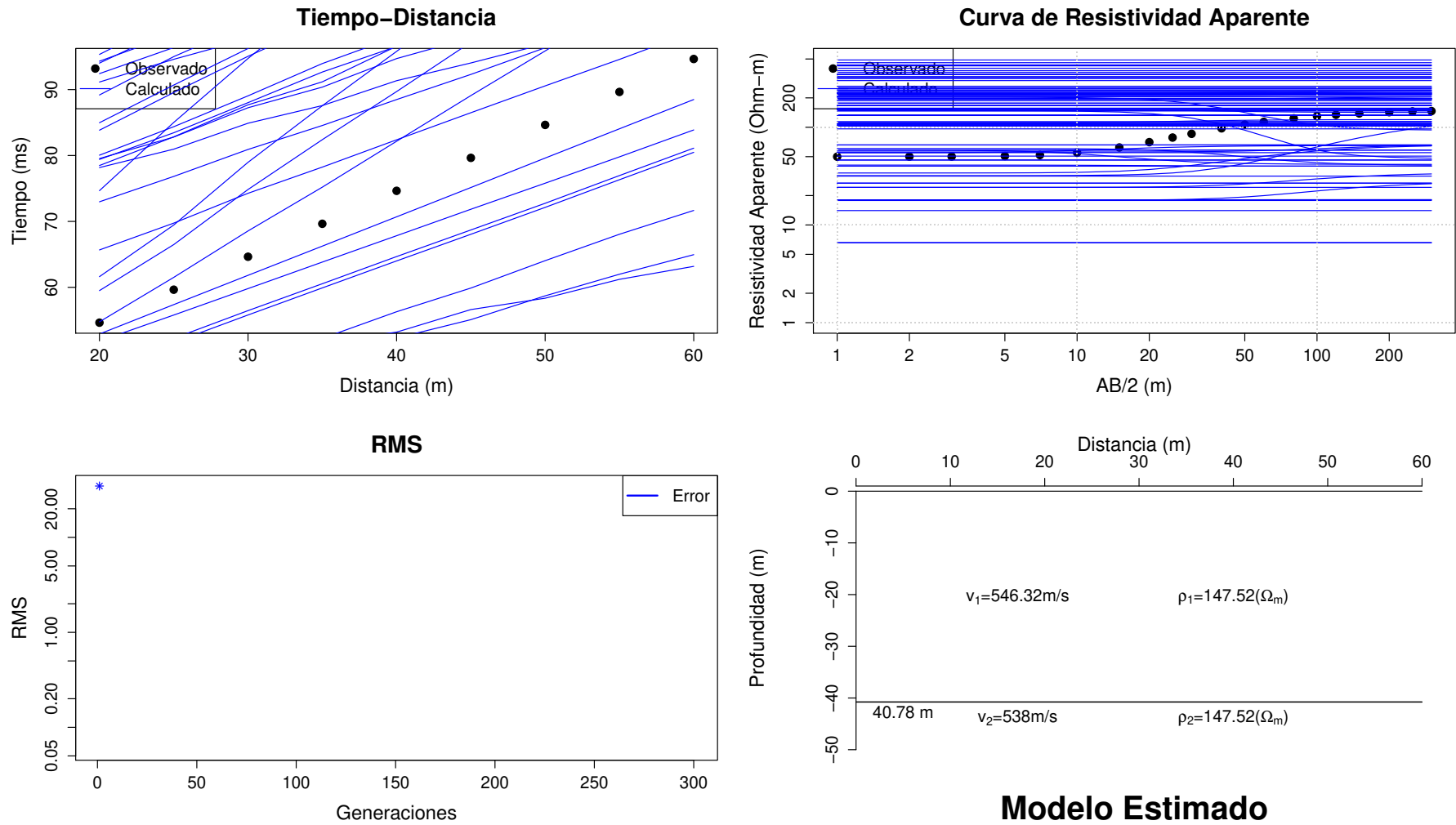


Figura 4.2: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 1, la población inicial explora todo el espacio de soluciones.

Generación No. 20

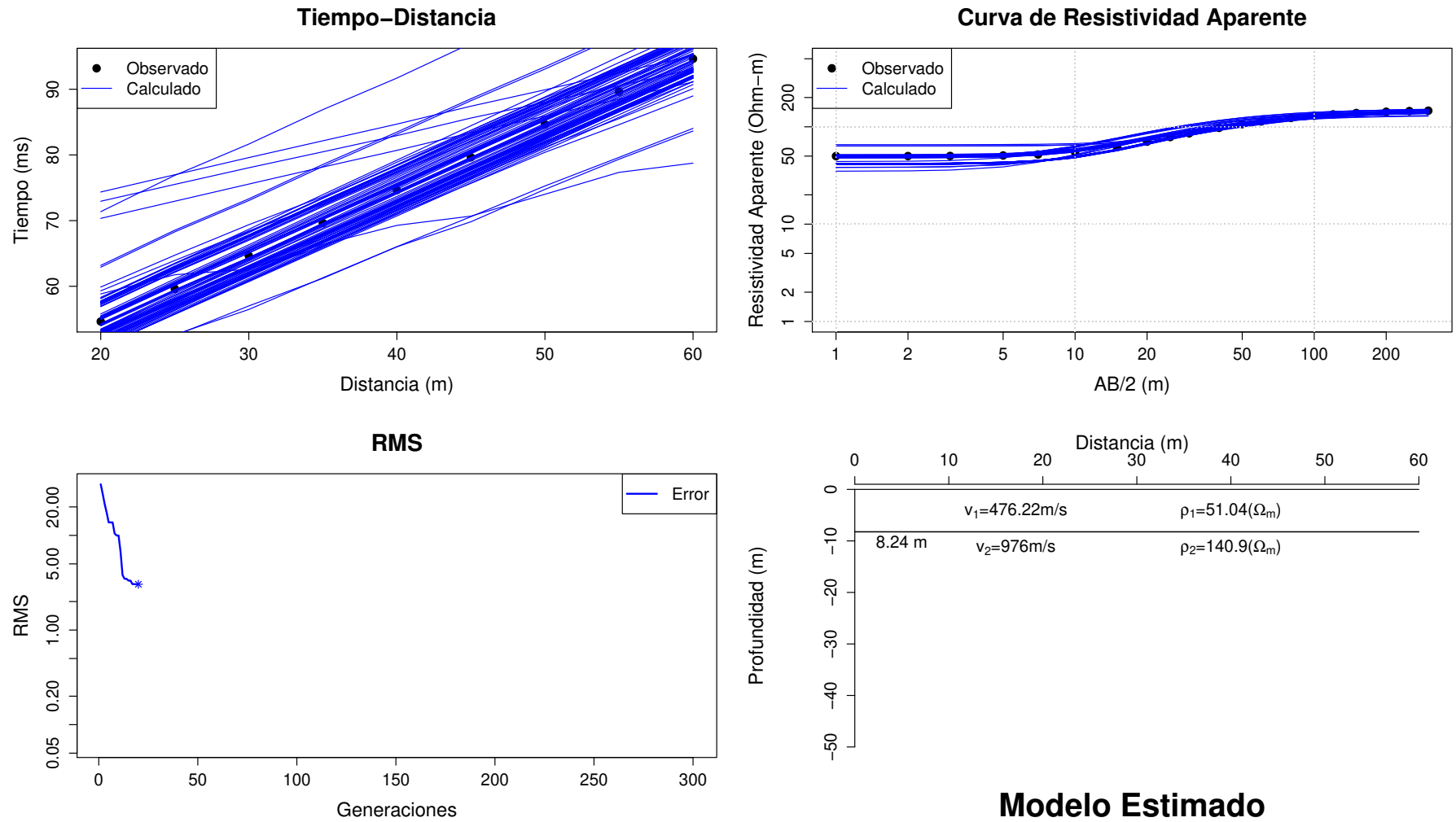


Figura 4.3: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 20, se puede apreciar la tendencia a seguir en las siguientes generaciones.

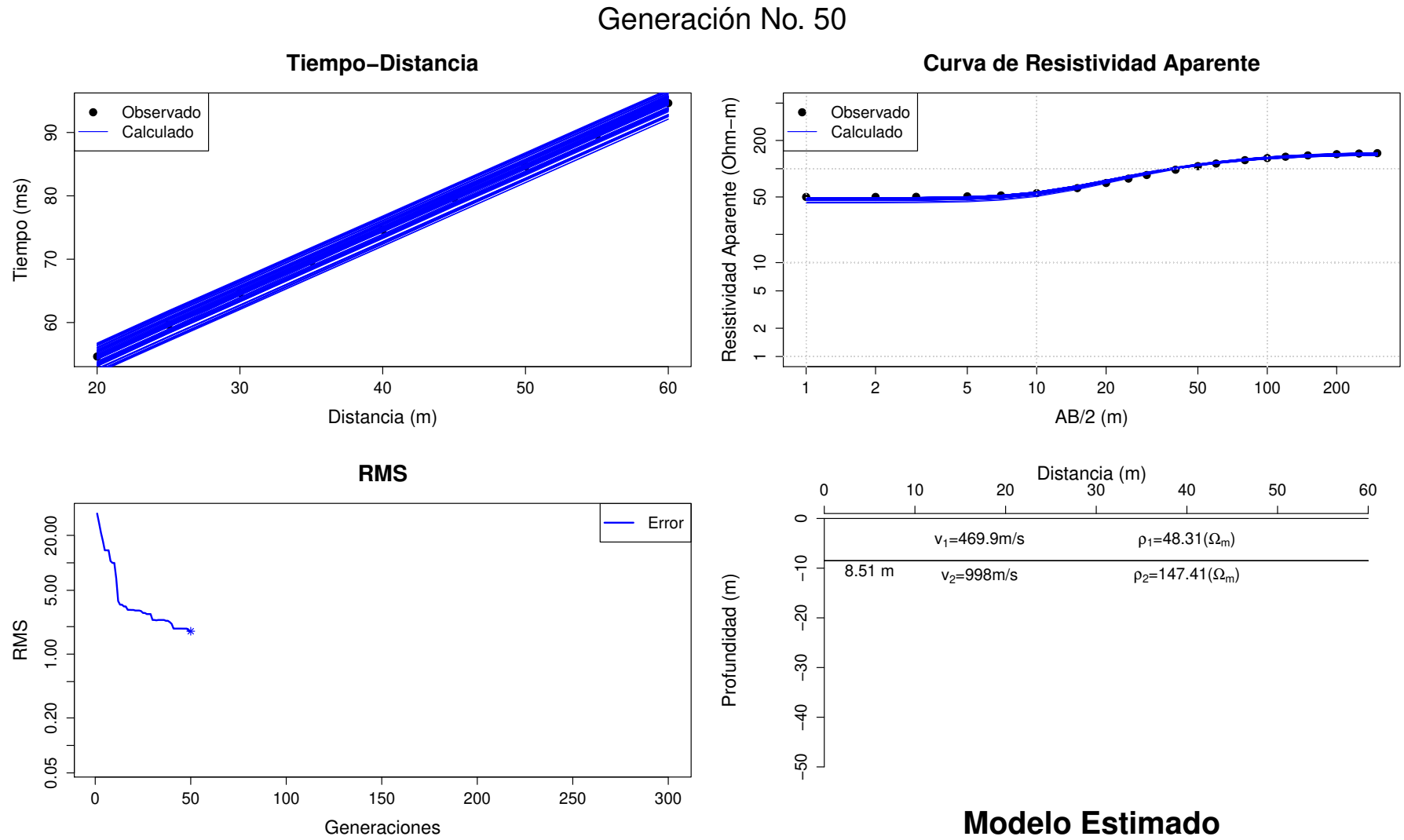


Figura 4.4: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 50.

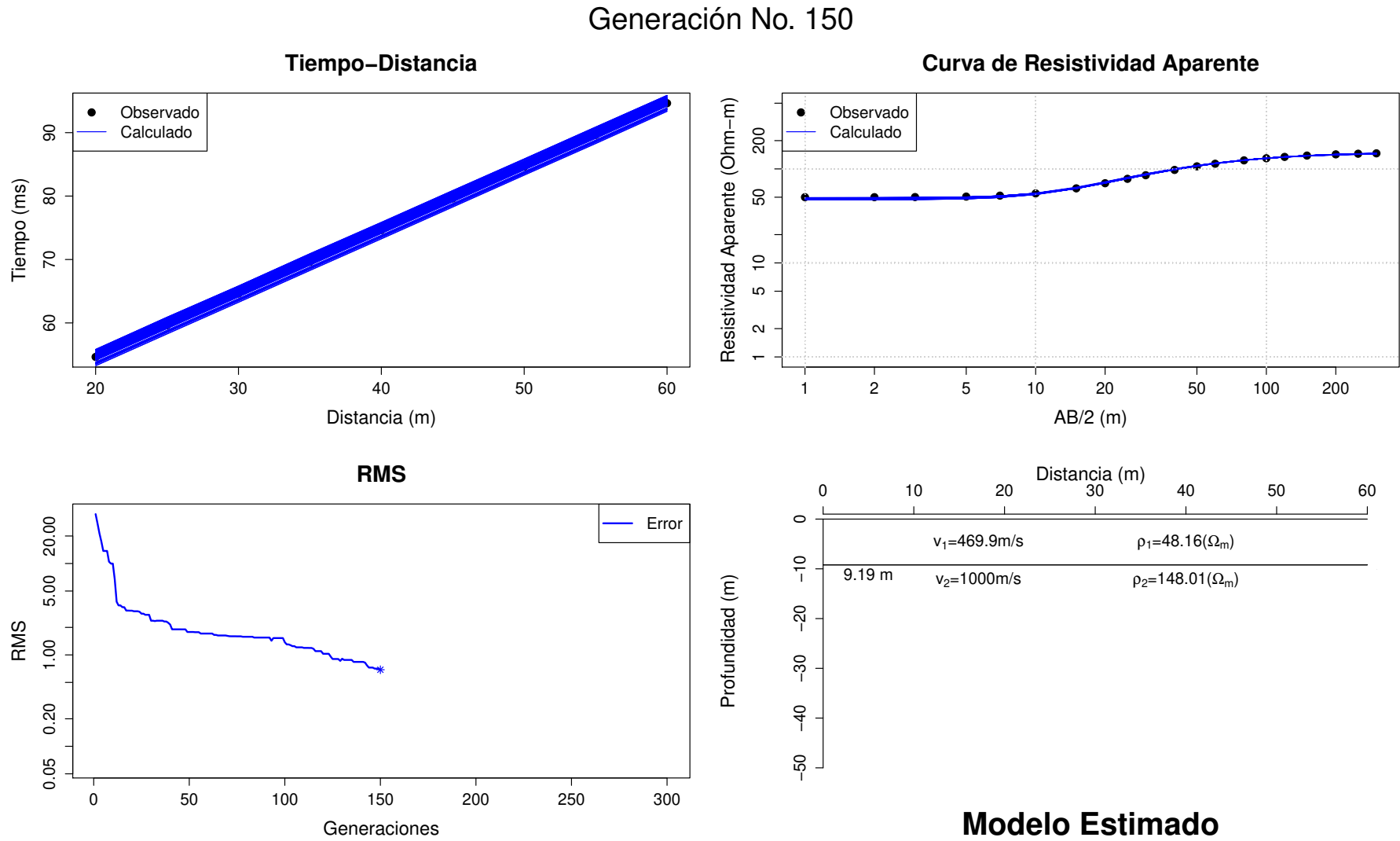


Figura 4.5: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 150.

Generación No. 300

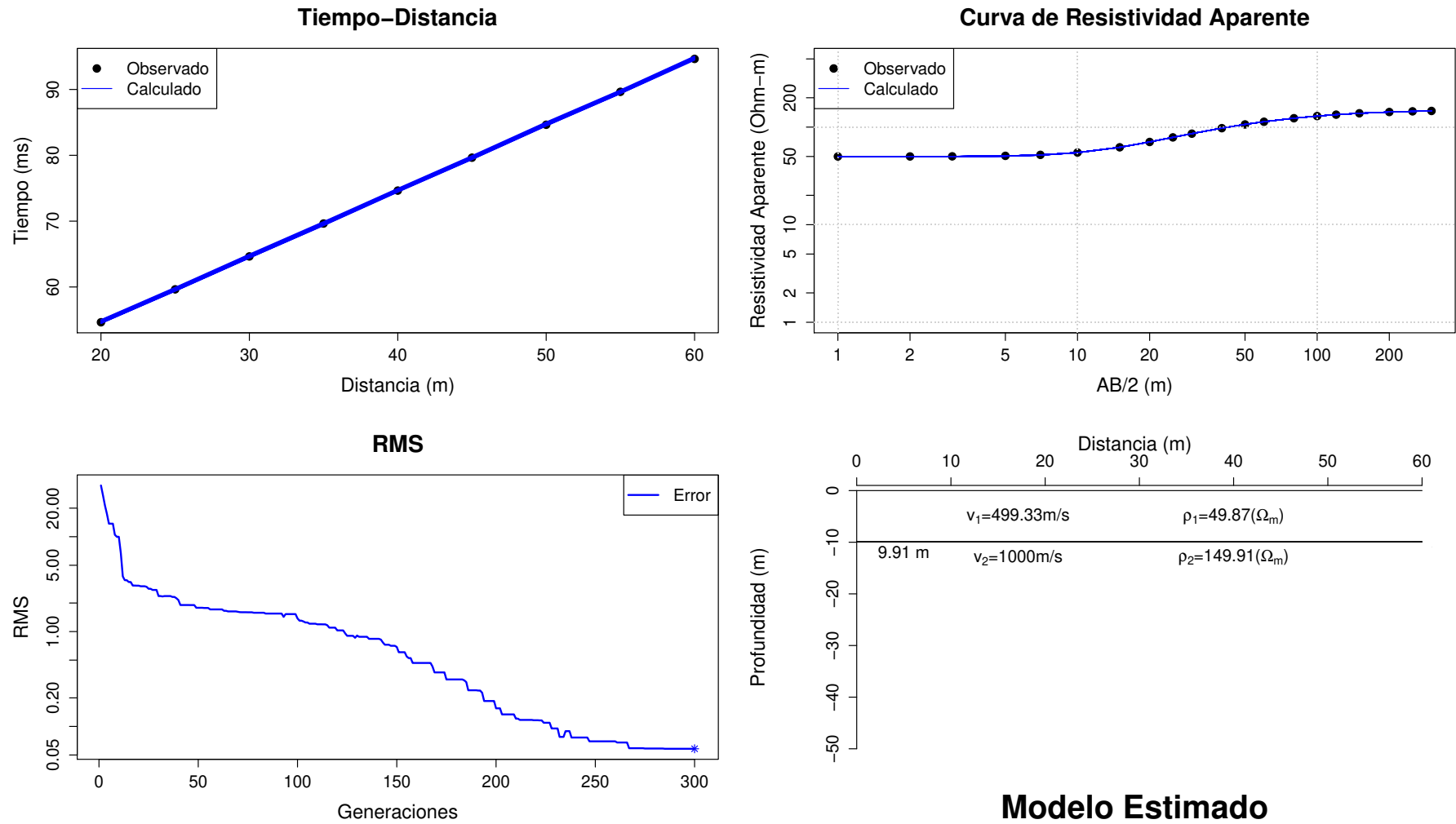


Figura 4.6: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 1 en la generación 300, a partir de la generación 150 se puede apreciar una estabilidad en el valor rms. Todos los individuos han llegado a una misma solución.

4.2.1. Inversión de datos para modelos de 3 capas y un semiespacio

Modelo 2

A partir de este ejemplo se utilizó la técnica de determinación de velocidades para Sísmica de Refracción en un medio estratificado (1/pendiente de la recta), esto con la finalidad de reducir el espacios de búsqueda en la velocidad la cual se determinó con un porcentaje de movimiento (%M) similar al mostrado en la Subsección 3.2.3 al aplicar la mutación en el algoritmo para obtener una mejor estimación de parámetros. En el Modelo 2 mostrado en la Figura 4.7, se presenta un medio de 3 capas y un semiespacio con resistividad y velocidad ascendente, el resultado final de la inversión se muestra gráficamente en la Figura 4.8. La Tabla 4.2 presenta los parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva aplicada al Modelo 2.

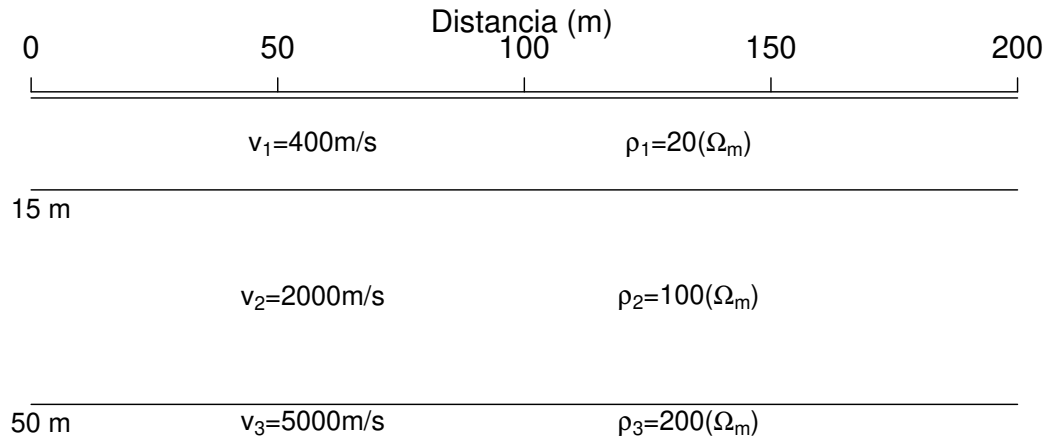


Figura 4.7: Parámetros del Modelo 2, de tres capas con velocidades y resistividades en orden ascendente.

Tabla 4.2: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 2, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
500	10	0-60 m	0-500 $\Omega\text{-m}$	20

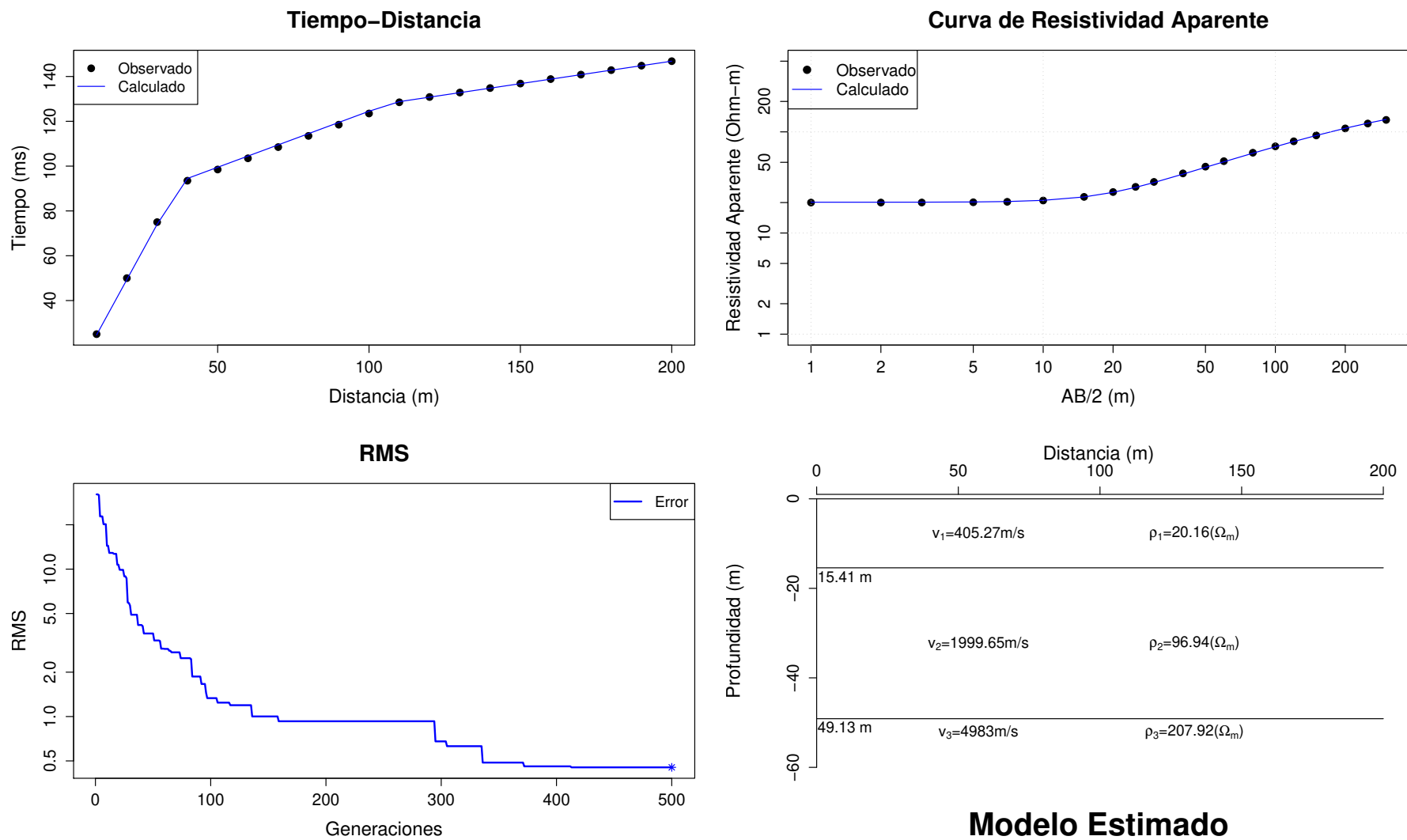


Figura 4.8: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 2.

Modelo 3

Se presenta una capa resistiva en medio de dos conductivas mostrado en la Figura 4.9, con el objetivo de resolver la inversión en un problema de equivalencia, para estos casos puede resultar más difícil ya que se puede presentar un conjunto de soluciones que tengan un buen ajuste a la curva de resistividad aparente, aunque con la información proporcionada por la sísmica de refracción se puede reducir esta incertidumbre, para determinar la solución óptima del modelo se toma aquella con el valor *rms* más bajo. El resultado final de la inversión se muestra gráficamente en la Figura 4.10. La Tabla 4.3 presenta los parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva aplicada al Modelo 3.

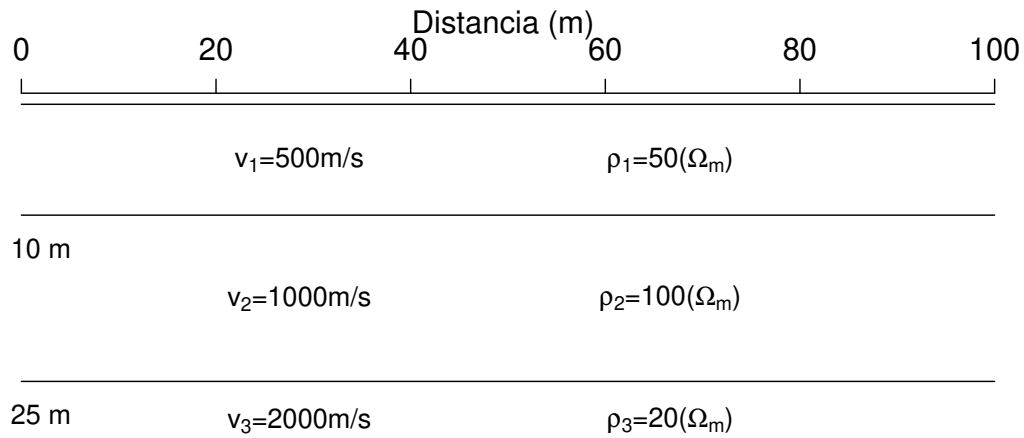


Figura 4.9: Parámetros del Modelo 3, de tres capas con velocidades ascendentes y una capa resistiva en medio de dos conductivas.

Tabla 4.3: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 3, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
500	10	0-60 m	0-300 $\Omega\text{-m}$	20

95

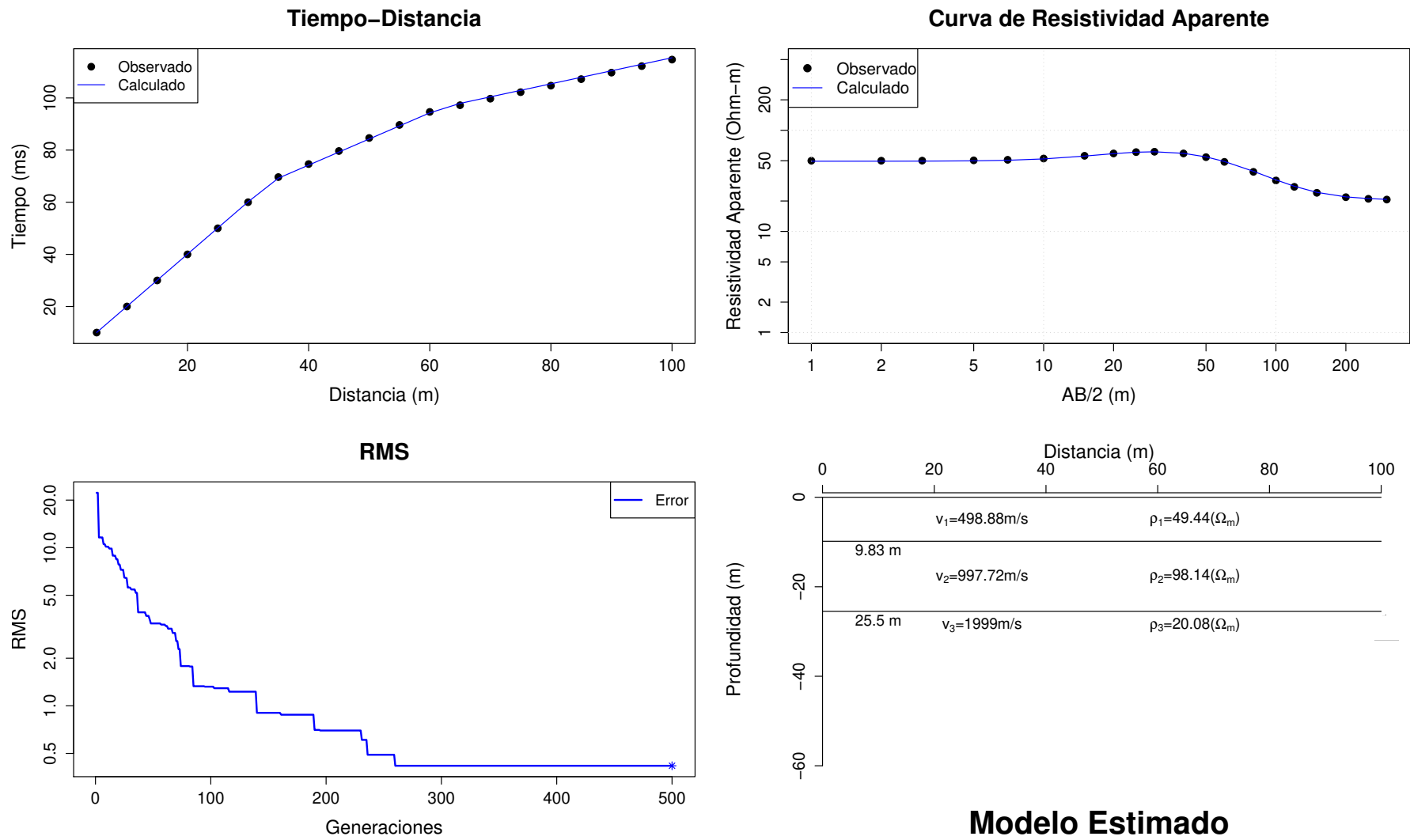


Figura 4.10: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 3.

Modelo 4

A partir de este modelo se agregó un 5 % de ruido gaussiano a los datos observados para simular las condiciones de los datos reales. Al igual que en el Modelo 3 se plantea un problema de equivalencia como se presenta en la Figura 4.11, aunque para este caso se propone un medio conductor en medio de dos resistivos. En la Tabla 4.4 se muestran los parámetros utilizados en la PE; mientras que en la Figura 4.12 se muestra el resultado final de la inversión.

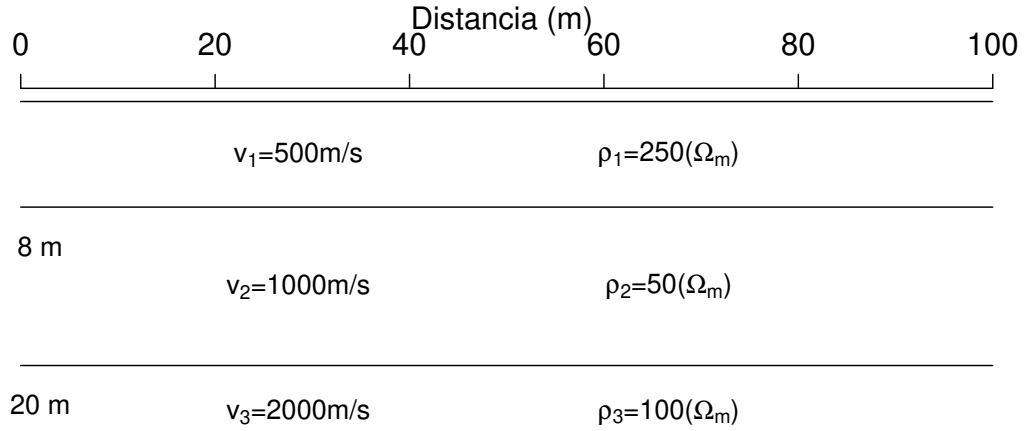


Figura 4.11: Parámetros del Modelo 4, de tres capas con velocidades ascendentes y una capa conductiva en medio de dos resistivas.

Tabla 4.4: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 4, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
800	10	0-40 m	0-300 $\Omega\text{-m}$	20

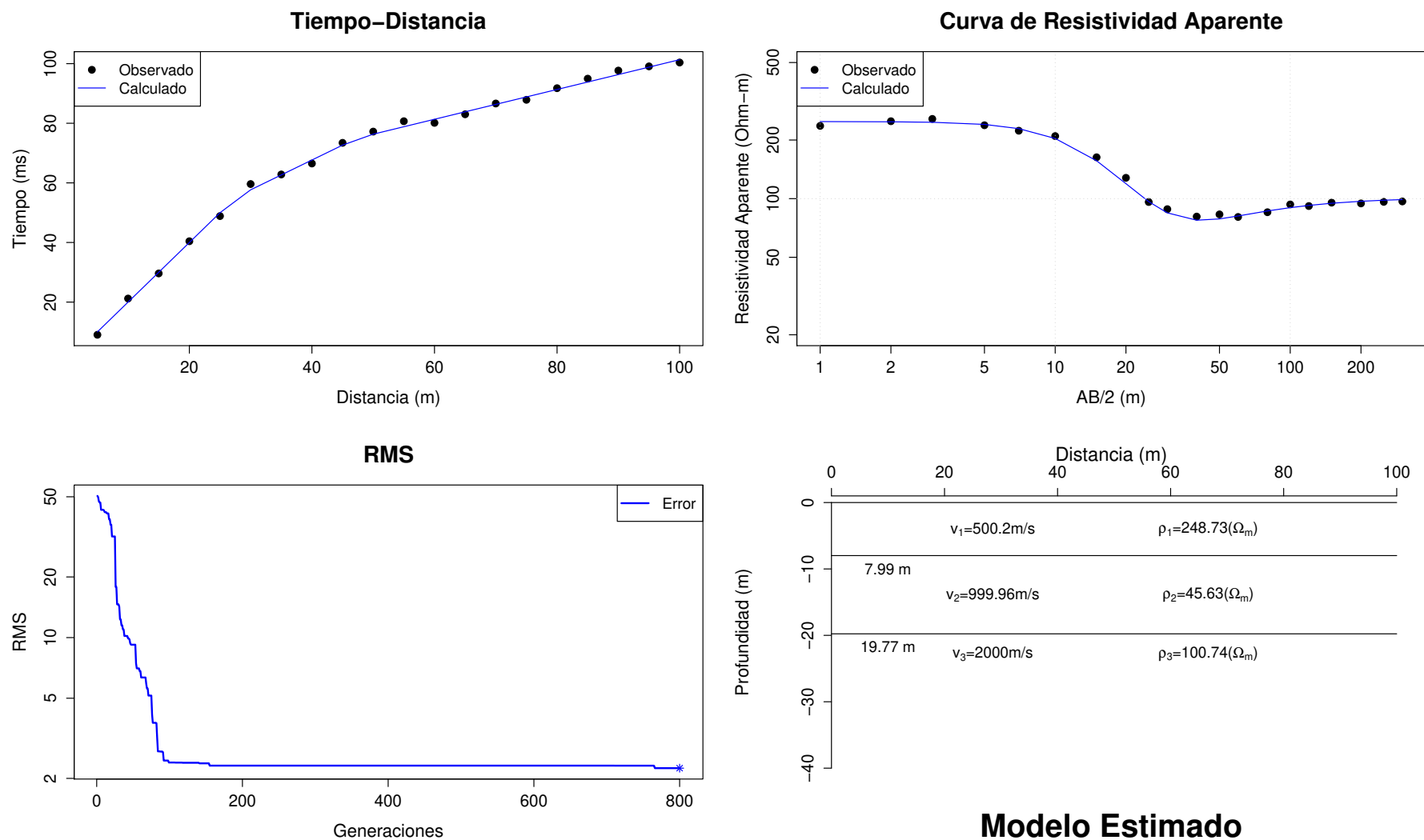


Figura 4.12: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 4.

4.2.2. Inversión de datos para modelos de 4 capas

Modelo 5

El Modelo 5 fue diseñado para 4 capas en el cual se presentan valores de resistividad ascendentes con la profundidad como se muestra en la Figura 4.13. Conforme el modelo se vuelve más complejo la cantidad de variables aumenta por lo que puede ser requerida una mayor cantidad de generaciones para llegar a una solución óptima. En la Tabla 4.5 se muestran los parámetros utilizados en la PE, mientras que en la Figura 4.14 se muestra el resultado final de la inversión.

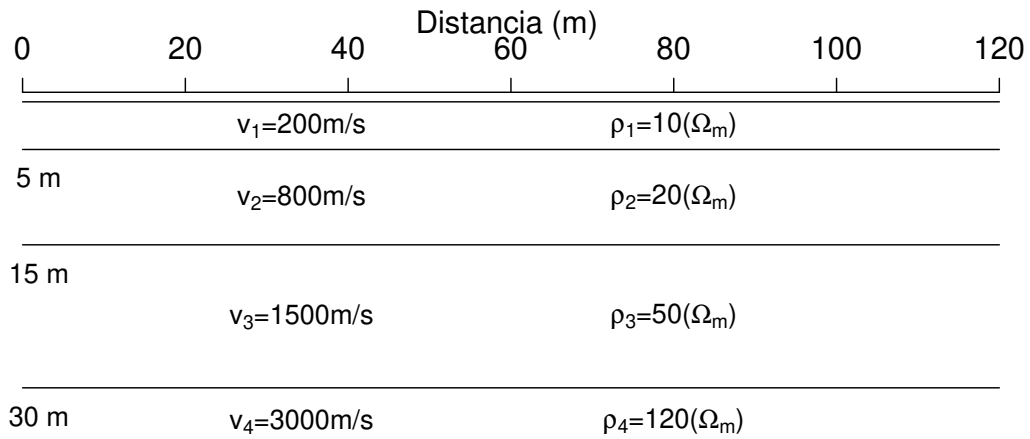


Figura 4.13: Parámetros del Modelo 5, de 4 capas con velocidades y resistividades en orden ascendente.

Tabla 4.5: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 5, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
800	10	0-40 m	0-400 Ω -m	20

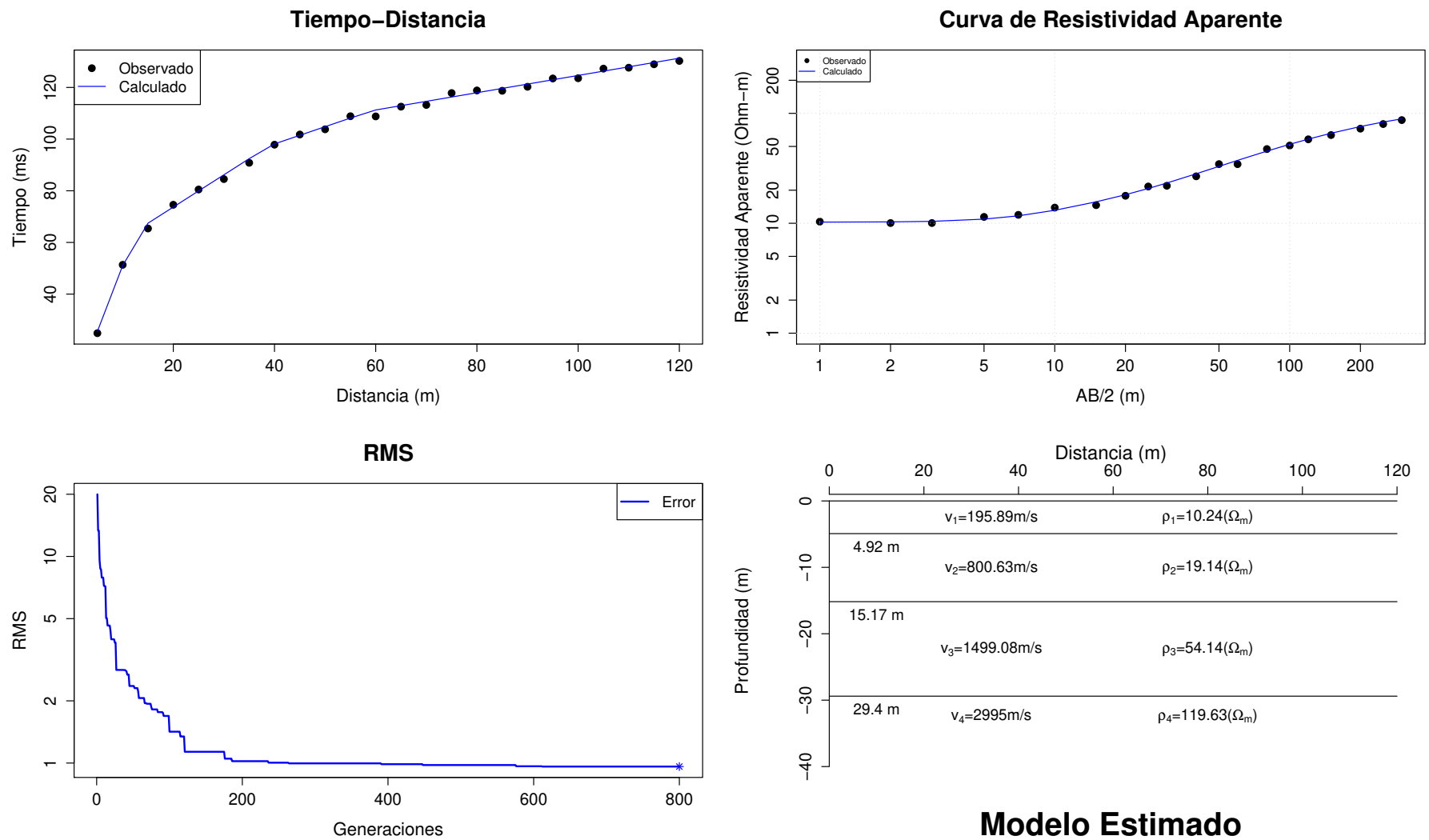


Figura 4.14: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 5.

Modelo 6

Para el Modelo 6 se presentan distintos medios conductivos intercalados con resistivos aumentando la complejidad del problema (Figura 4.15). En la Tabla 4.6 se muestran los parámetros utilizados en la PE, mientras que en la Figura 4.16 se muestra el resultado final de la inversión.

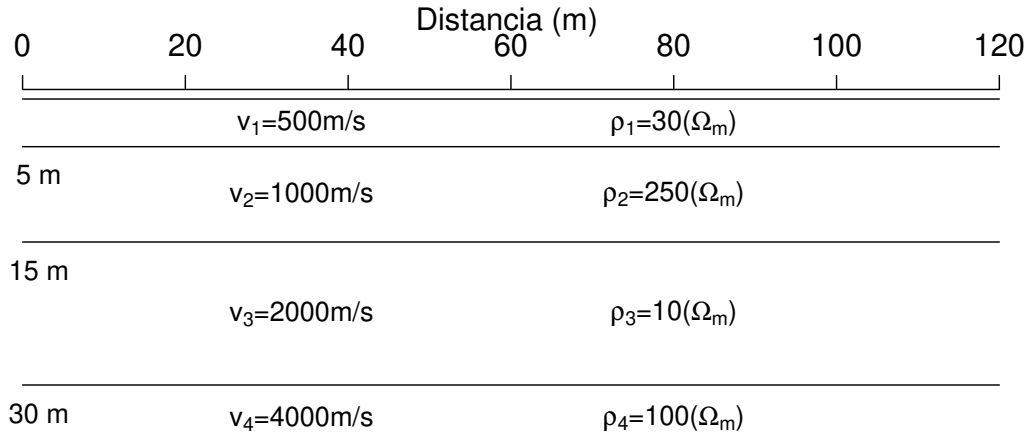


Figura 4.15: Parámetros del Modelo 6, de 4 capas con velocidades ascendentes y alternación en resistividades.

Tabla 4.6: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 6, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
800	10	0-50 m	0-400 Ω -m	20

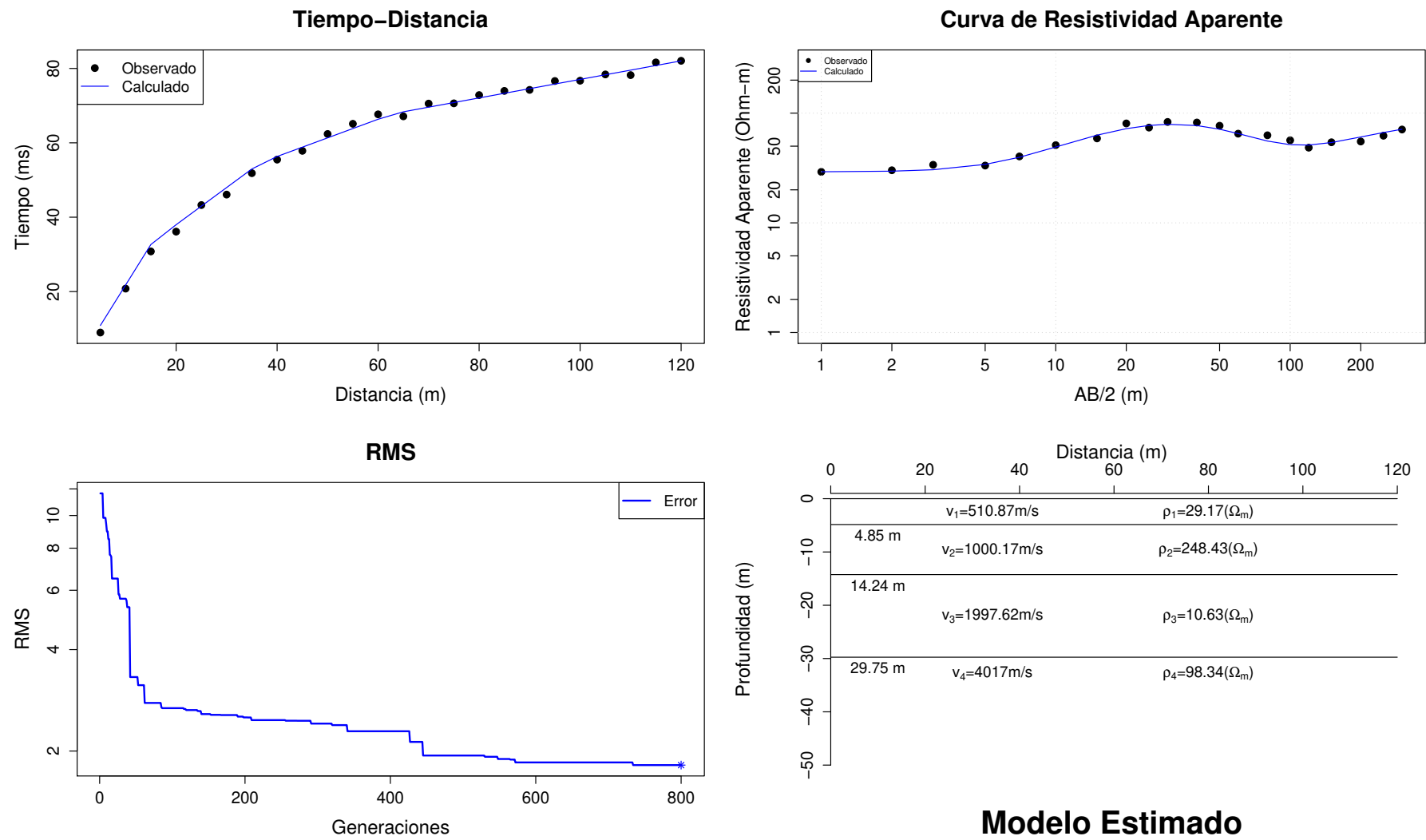


Figura 4.16: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 6.

4.2.3. Inversión de datos para un modelo complejo

Modelo 7

Para este caso se analizó un modelo que presenta un mismo medio intemperizado superficialmente y humedecido a cierta profundidad, por lo que sísmicamente se comporta como un medio de 2 capas y resistivamente como un medio de tres capas (Figura 4.17). En la Tabla 4.7 se muestran los parámetros utilizados en la PE. La Figura 4.18 muestra el resultado final de la inversión.

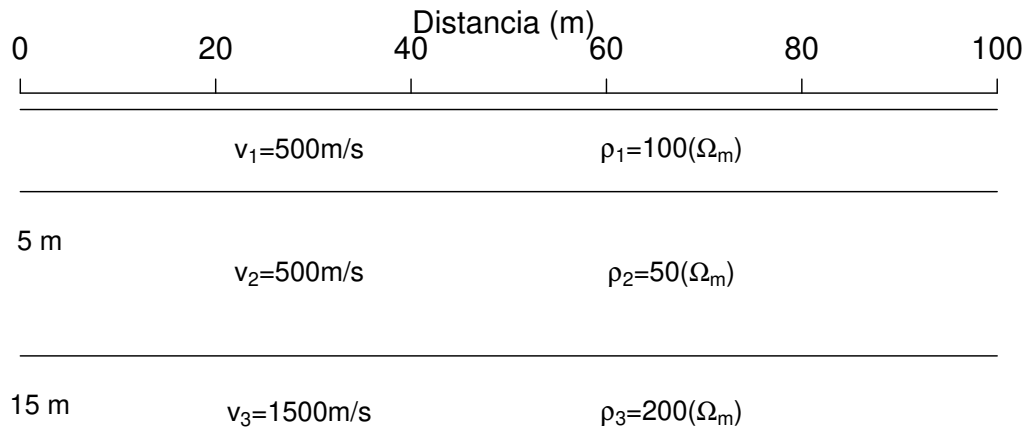


Figura 4.17: Parámetros del Modelo 7, que consiste de dos capas para sísmica y tres capas para resistividad.

Tabla 4.7: Parámetros utilizados en los operadores de Programación Evolutiva para el Modelo 7, así como los espacios de búsqueda establecidos para cada parámetro a estimar (EB).

Generaciones	Individuos	EB Profundidad	EB Resistividad	%M Velocidad
800	10	0-40 m	0-400 Ω-m	20

Se aplicó un 5 % de ruido gaussiano a los datos sintéticos de sísmica y resistividad del Modelo 7 para simular las condiciones de datos reales y se realizó la inversión. La Figura 4.19 muestra los resultados obtenidos.

Caso sin Ruido

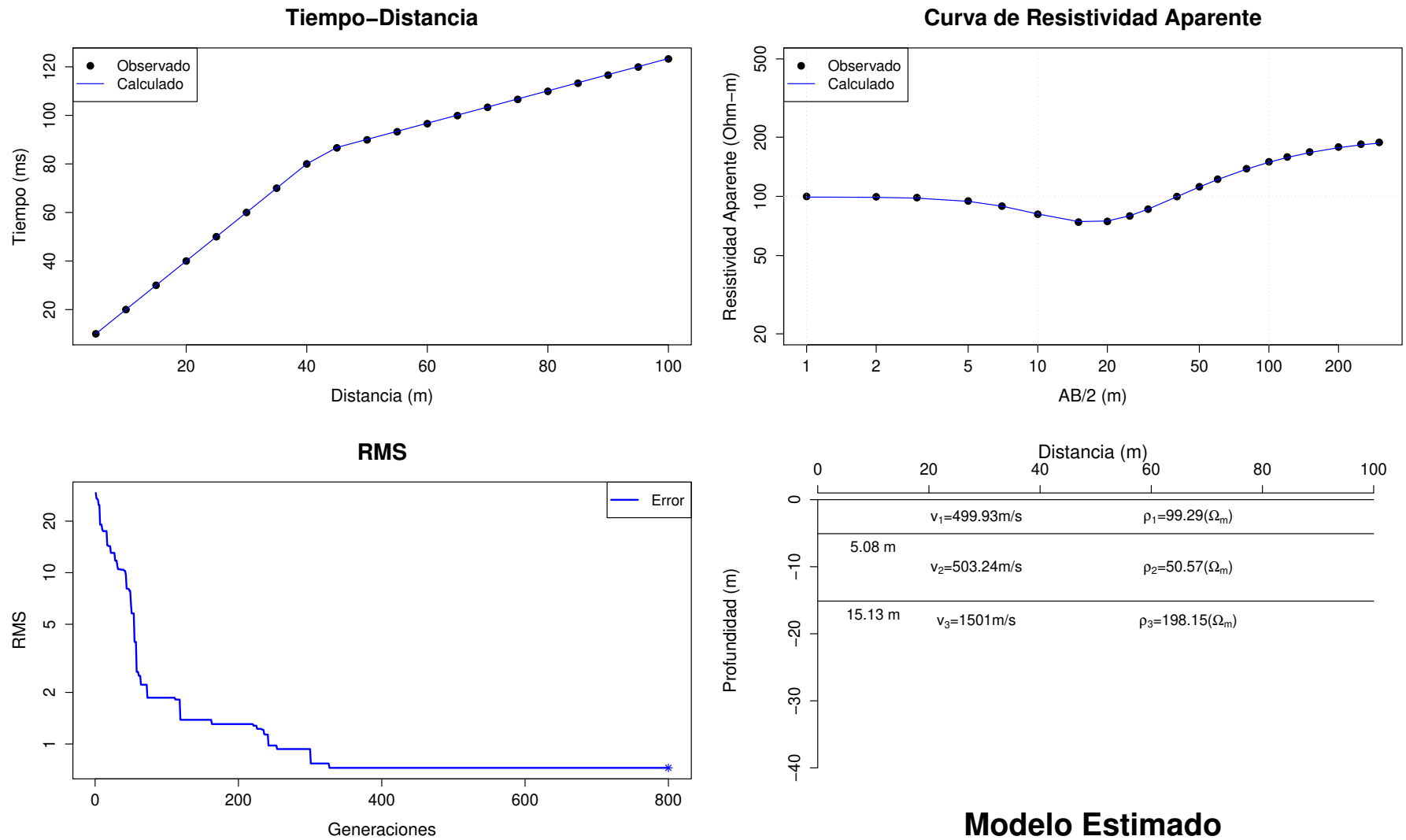


Figura 4.18: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 7.

64

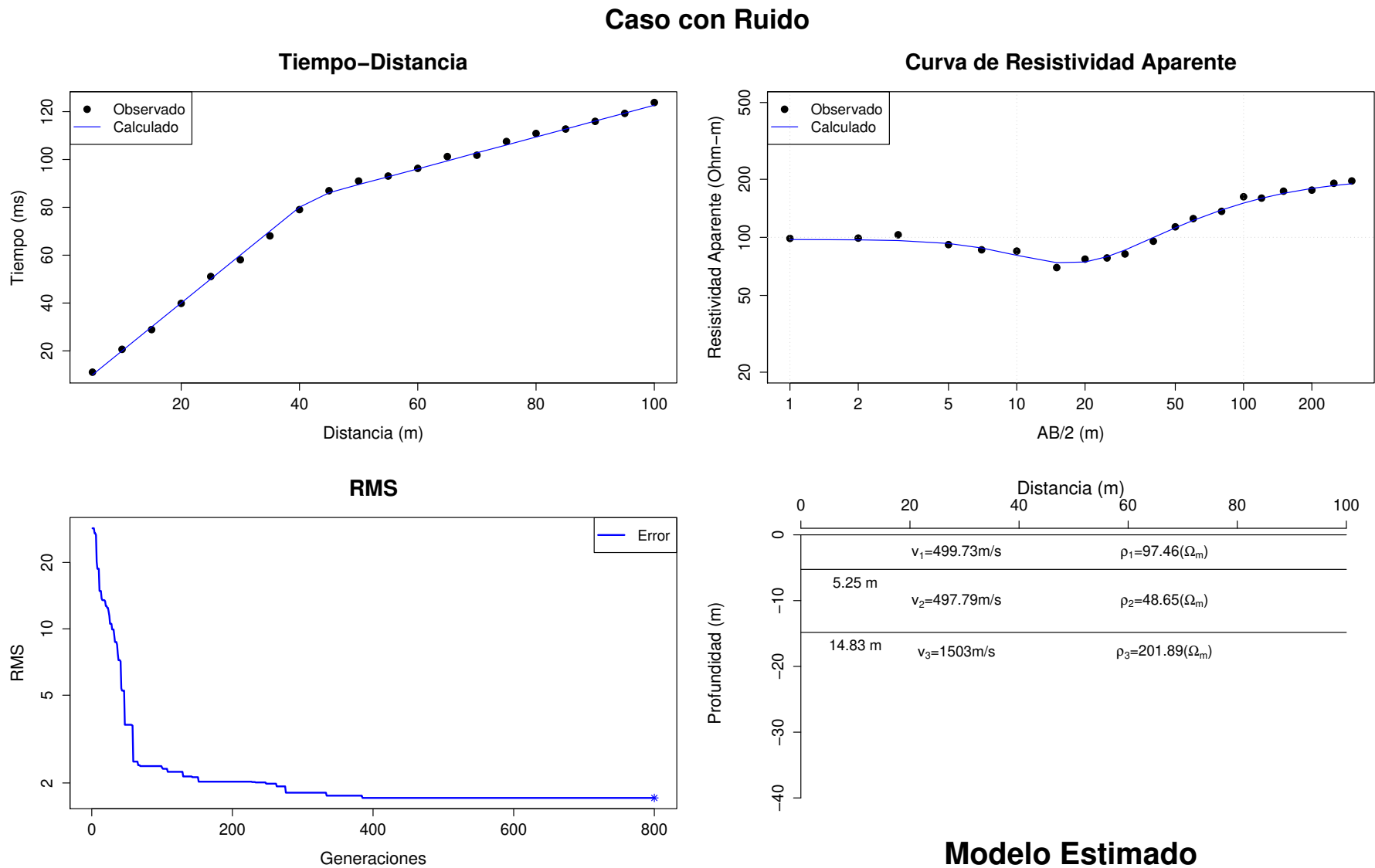


Figura 4.19: Resultado de la inversión conjunta de datos de resistividad aparente y tiempos de arribo del Modelo 7 contaminado con un 5 % de ruido gaussiano.

4.3. Análisis

Se presenta un distinto grado de complejidad para cada uno de los modelos analizados, con el objetivo de probar la versatilidad del algoritmo de inversión. Se puede apreciar que al pasar un número determinado de generaciones el valor RMS no sufre cambios significativos, esto debido a que las diferencias entre los datos observados y calculados son mínimos por lo que el problema converge a una misma solución, que corresponde a los parámetros estimados en la inversión conjunta.

Al realizar la inversión en modelos contaminados con ruido, el valor RMS es proporcional con el porcentaje de ruido de los datos, pero se obtienen buenos resultados con niveles de 1 al 5 % de ruido gaussiano. El número de generaciones e individuos utilizados para resolver cada problema puede variar, para este caso se obtuvo un mejor rendimiento al utilizar un número reducido de individuos.

4.4. Resumen

Se han presentado los resultados obtenidos mediante las pruebas de inversión para distintos modelos estratificados del subsuelo, en ellos se pueden observar las diferencias mínimas entre los datos observados y calculados produciendo una estimación de parámetros bastante aproximada a los modelos propuestos en el problema directo, lo que comprueba el funcionamiento correcto del algoritmo de inversión.

Como se puede apreciar en los métodos sometidos a prueba, los espacios de búsqueda seleccionados varían para cada parámetro a estimar, esto mejora considerablemente el rendimiento del algoritmo ya que al aplicar ciertas restricciones, se eliminan las soluciones no viables.

Capítulo 5

Conclusiones y Recomendaciones

5.1. Conclusiones

El algoritmo aplicado a la inversión conjunta de Sísmica de Refracción y SEV's tuvo como resultado una estimación de parámetros bastante aproximada a los propuestos en el modelado directo. Se probó que es capaz de ser utilizado en datos sintéticos contaminados con ruido validando su efectividad al trabajar con datos reales, por lo que la Programación Evolutiva puede ser considerada como una buena opción para resolver el problema inverso en geofísica. Algunas particularidades en la búsqueda de la solución al problema inverso son:

- a) La selección de un rango de búsqueda lo suficientemente amplio para explorar el espacio de soluciones que es acortado con el paso de las generaciones hasta llegar a una solución óptima.
- b) Este rango de búsqueda inicial puede ser reducido con información geofísica y geológica del área de estudio con la finalidad de mejorar el tiempo de cómputo y la solución estimada por el algoritmo.
- c) Establecer un número de generaciones e individuos puede ser diferente para cada problema a resolver, en este trabajo se resolvieron distintos problemas de optimización cuyos parámetros de PE varían para cada uno de ellos.

El uso de las técnicas metaheurísticas en la geofísica es viable ya que muchos de los problemas que presentan un alto grado de complejidad pueden ser planteados como un problema de optimización. El lenguaje de programación R demostró que a pesar de tener

un enfoque estadístico posee la capacidad necesaria para ser utilizado al abordar problemas de optimización.

5.2. Recomendaciones

Existen mejoras que pueden implementarse en el método propuesto, algunas recomendaciones que se pueden desprender como un trabajo futuro son las siguientes:

- a) Efectuar la inversión conjunta combinando métodos geofísicos que no hayan sido analizados en el presente trabajo, para considerar la relación de parámetros en común de cantidades físicas diferentes.
- b) Realizar la inversión en modelos con anisotropía en el medio, así como en distintas geometrías del subsuelo.
- c) Adaptar la PE a la inversión de datos en modelos 2-D del subsuelo.
- d) Combinar la Optimización Multiobjetivo con los Algoritmos Evolutivos, ya que la inversión conjunta requiere la optimización simultánea de más de una función.

Bibliografía

- Aster, R. C., Borchers, B., y Thurber, C. H. (2013). Parameter Estimation and Inverse Problems, Academy Press, Oxford, UK, 360p.
- Bäck, T. y Schwefel, H.-P. (1993). An Overview of Evolutionary Algorithms for Parameter Optimization. *Evol. Comput.*, 1:1–23.
- Burger, R. (1992). Exploration Geophysics of the Shallow Subsurface, New Jersey Prentice Hall, US, 485p.
- Dávila Torres, R. F. (2012). Trazado de rayos sísmicos mediante la optimización de la ecuación de tiempos de arribo utilizando Programación Evolutiva. Tesis de Licenciatura, FCT-UANL, 414p.
- de Nardis, R., Cardarelli, E., y Dobroka, M. (2005). Quasi-2D hybrid joint inversion of seismic and geoelectric data. *Geophysical Prospecting*, 53:705–716.
- Deb, K. (2001). Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 493p.
- Fedi, M. y Rapolla, A. (1999). 3-D inversion of gravity and magnetic data with depth resolution. *Geophysics*, 64:452–460.
- Fogel, L., Owens, A., y Walsh, M. (1966). Artificial intelligence through simulated evolution, Chichester, WS, UK.
- Gallardo, L. y Meju, M. (2003). Characterization of heterogeneous near-surface materials by joint 2D inversion of dc resistivity and seismic data. *Geophysical Research Letters*, 30:1658.
- Gallardo Delgado, L., Pérez Flores, M. A., y Gómez Treviño, E. (2003). A versatile algorithm for joint 3D inversion of gravity and magnetic data. *Geophysics*, 68:949–959.

- Ghosh, D. (1971). The application of Linear Filter Theory to the Direct Interpretation of Geoelectric Resistivity Sounding Measurements. *Geophysical Prospecting*, 19:192–217.
- Guptasarma, D. (1982). Optimization of Short Digital Linear Filters for Increased Accuracy. *Geophysical Prospecting*, 30:501–514.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press. second edition, 1992.
- Juhojuntti, N. y Kamm, J. (2015). Joint inversion of seismic refraction and resistivity data using layered models — Applications to groundwater investigation. *Geophysics*, 80:EN43–EN55.
- Kearey, P., Brooks, M., y Hill, I. (2013). *An Introduction to Geophysical Exploration*, Blackwell Science, Third Edition, Oxford, UK, 262p.
- Koefoed, O. (1968). *The Application of the Kernel Function in Interpreting Geoelectrical Resistivity Measurements*. Schweizerbart Science Publishers, Stuttgart, Germany.
- Kumar, S., Shahid, S., y Dewangan, P. (1999). SEISRES - a Visual C++ program for the sequential inversion of seismic refraction and geoelectric data. *Computers and Geosciences*, 26:177–200.
- Levent, Y. y Demirci, A. (2008). A Damped Least-Squares Inversion Program for the Interpretation of Schlumberger Sounding Curves. *Journal of Applied Sciences*, 22:192–217.
- Marroquín Navarro, L. M. (2012). Inversión sísmica de reflexión 2D, mediante la técnica de optimización Programación Evolutiva. Tesis de Licenciatura, FCT-UANL, 138p.
- Meju, M. (1994). *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem. Theory and Practice*, Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, OK, 296p.
- Méndez Delgado, S. (1997). Inversión y modelado de campos eléctricos y magnéticos para números de inducción pequeños. Tesis de Doctorado, CICESE, 388p.
- Menke, W. (1984). *Geophysical Data Analysis: Discrete Inverse Theory*, Academic Press Inc, San Diego, US, 260p.

- Parker, R. L. (1994). Geophysical Inverse Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ, 391p.
- Pekeris, C. L. (1940). Direct method of interpretation in resistivity prospecting. *Geophysics*, 5:31–42.
- Pérez Flores, M. A., Méndez Delgado, S., y Gómez Treviño, E. (2001). Imaging low-frequency and dc electromagnetic fields using a simple linear approximation. *Geophysics*, 66:1067–1081.
- Pilkington, M. (2006). Joint inversion of gravity and magnetic data for two-layer models. *Geophysics*, 71:L35–L42.
- Pous, J. (1983). Aplicaciones de la Inversión Generalizada a la Interpretación de Sondeos Geoelectricos. Tesis de Doctorado, Universidad de Barcelona, 159p.
- Rechenberg, I. (1973). Evolutionsstrategie: Otimierung techniser Systeme nach Prinzipien der biolosichen Evolution. *Fromman-Holzborg Veerlag*.
- Sánchez Priego, M. (2012). Diseño de un Algoritmo Genético de Optimización Global con una aplicación a la Inversión de Sondeos Eléctricos Verticales. Tesis de Licenciatura, FCT-UANL, 98p.
- Sen, M. K. y Stoffa, P. L. (1995). Global Optimization Methods in Geophysical Inversion, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 281p.
- Tarantola, A. (2005). Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, US, 342 p.
- Telford, W. M., Geldart, L. P., y Sheriff, R. E. (1990). Applied Geophysics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 792p.
- Vozoff, K. y Jupp, D. L. (1974). Joint Inversion of Geophysycal Data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 42:997–991.